

Méthodes Numériques II
Chapitre 2: Dérivation numérique
Exercices

EXERCICE 1

Soit $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

Q. 1 Montrer que si $\varphi \in \mathcal{C}^2([a, b]; \mathbb{R})$ alors $\forall x \in [a, b[, \forall h > 0$ tel que $(x + h) \in [a, b]$, on a

$$\frac{d\varphi}{dx}(x) = \frac{\varphi(x + h) - \varphi(x)}{h} + \mathcal{O}(h) \quad (1.1)$$

□

Q. 2 Montrer que si $\varphi \in \mathcal{C}^2([a, b]; \mathbb{R})$ alors $\forall x \in]a, b], \forall h > 0$ tel que $(x - h) \in [a, b]$, on a

$$\frac{d\varphi}{dx}(x) = \frac{\varphi(x) - \varphi(x - h)}{h} + \mathcal{O}(h) \quad (1.2)$$

□

Q. 3 Montrer que si $\varphi \in \mathcal{C}^3([a, b]; \mathbb{R})$ alors $\forall x \in]a, b[, \forall h > 0$ tel que $(x + h) \in [a, b]$ et $(x - h) \in [a, b]$, on a

$$\frac{d\varphi}{dx}(x) = \frac{\varphi(x + h) - \varphi(x - h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \quad (1.3)$$

□

Q. 4 Montrer que si $\varphi \in \mathcal{C}^4([a, b]; \mathbb{R})$ alors $\forall x \in]a, b[, \forall h > 0$ tel que $(x + h) \in [a, b]$ et $(x - h) \in [a, b]$, on a

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}(x) = \frac{\varphi(x + h) - 2\varphi(x) + \varphi(x - h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2) \quad (1.4)$$

□

EXERCICE 2

Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction suffisamment régulière, $x \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}^{+*}$.

Q. 1 Montrer que

$$\frac{d\varphi}{dx}(x) = \frac{-3\varphi(x) + 4\varphi(x + h) - \varphi(x + 2h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \quad (2.5)$$

□

Q. 2 Montrer que

$$\frac{d\varphi}{dx}(x) = \frac{3\varphi(x) - 4\varphi(x - h) + \varphi(x - 2h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \quad (2.6)$$

□

EXERCICE 3

Soit $f \in \mathcal{C}^3([a, b]; \mathbb{R})$. On note t^n , $n \in \llbracket 0, N \rrbracket$, une discrétisation **régulière** de $[a, b]$ de pas h . On note $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{N+1}$ le vecteur défini par $F_{n+1} = f(t^n)$, $\forall n \in \llbracket 0, N \rrbracket$.

Q. 1 a. Déterminer en fonction de h et \mathbf{F} , un vecteur $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{N+1}$ vérifiant

$$V_{n+1} = f'(t^n) + \mathcal{O}(h), \quad \forall n \in \llbracket 0, N \rrbracket.$$

b. Ecrire une fonction algorithmique, nommée `Derive1Ordre1`, permettant, à partir du vecteur \mathbf{F} et de la discrétisation régulière, de calculer le vecteur \mathbf{V} précédent. □

Q. 2 a. Connaissant uniquement h et le vecteur \mathbf{F} , déterminer un vecteur $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{N+1}$ vérifiant

$$W_n = f'(t^n) + \mathcal{O}(h^2), \quad \forall n \in \llbracket 0, N \rrbracket$$

b. Ecrire une fonction algorithmique, nommée `Derive1Ordre2`, permettant, à partir du vecteur \mathbf{F} et de la discrétisation régulière, de calculer le vecteur \mathbf{W} précédent. □

EXERCICE 4

On suppose écrites les fonctions Matlab/Octave `Derive1Order1` et `Derive1Order2` correspondant aux fonctions algorithmiques de l'exercice ???. Leurs syntaxes sont les suivantes:

$$\mathbf{V} = \text{Derive1Ordre1}(h, \mathbf{F}) \quad \text{et} \quad \mathbf{W} = \text{Derive1Ordre2}(h, \mathbf{F})$$

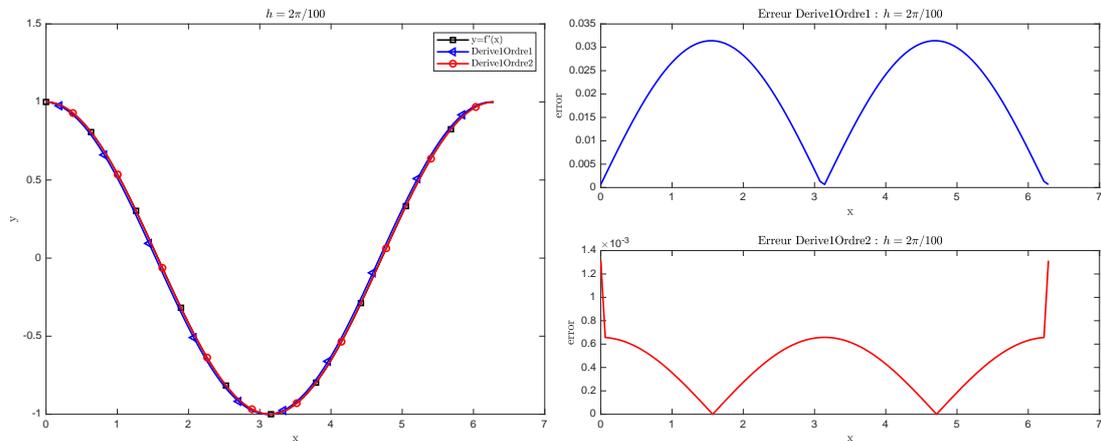
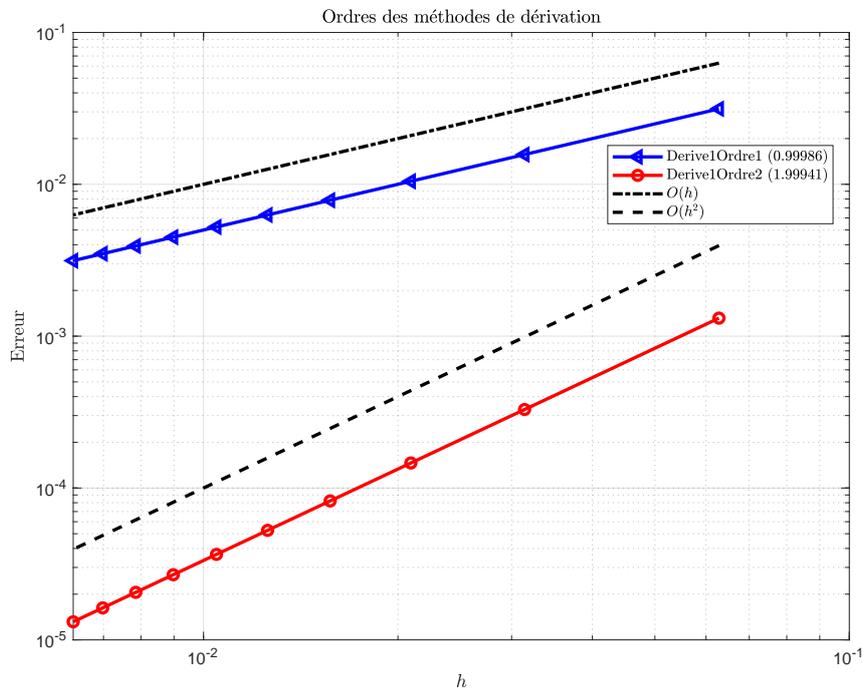


Figure 1: Avec $f(x) = \sin(x)$, $a = 0$, $b = 2\pi$, $N = 100$, à gauche, les différentes dérivées, à droite les erreurs commises par les deux fonctions.

Q. 1 Ecrire un programme Matlab/Octave permettant de reproduire ces deux graphiques. □

EXERCICE 5

Voici une figure mettant en évidence l'ordre des méthodes utilisées dans les fonctions `Derive1Order1` et `Derive1Order2` de l'exercice précédent



On suppose écrites les fonctions Matlab/Octave `Derive1Order1` et `Derive1Order2` correspondant aux fonctions algorithmiques de l'exercice ???. Leurs syntaxes sont les suivantes:

$$V = \text{Derive1Ordre1}(h, F) \quad \text{et} \quad W = \text{Derive1Ordre2}(h, F)$$

- Q. 1** a. *Ecrire un programme Matlab/Octave permettant de calculer l'ensemble des données nécessaires à la représentation graphique de l'ordre des deux méthodes (voir figure).*
- b. *A l'aide de ces données, calculer numériquement l'ordre des deux méthodes.* □

Les commandes Matlab/Octave permettant de représenter des données en échelles logarithmique sont `loglog`, `semilogx` et `semilogy`. Elles s'utilisent globalement comme la fonction `plot`.

- Q. 2** *Ajouter au programme précédent le code permettant de reproduire la figure.* □