

Méthodes Numériques II

Chapitre 2: Dérivation numérique

Exercices

EXERCICE 1

Soit $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

Q. 1 Montrer que si $\varphi \in \mathcal{C}^2([a, b]; \mathbb{R})$ alors $\forall x \in [a, b[, \forall h > 0$ tel que $(x + h) \in [a, b]$, on a

$$\frac{d\varphi}{dx}(x) = \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} + \mathcal{O}(h) \quad (1.1)$$

□

Q. 2 Montrer que si $\varphi \in \mathcal{C}^2([a, b]; \mathbb{R})$ alors $\forall x \in]a, b], \forall h > 0$ tel que $(x - h) \in [a, b]$, on a

$$\frac{d\varphi}{dx}(x) = \frac{\varphi(x) - \varphi(x-h)}{h} + \mathcal{O}(h) \quad (1.2)$$

□

Q. 3 Montrer que si $\varphi \in \mathcal{C}^3([a, b]; \mathbb{R})$ alors $\forall x \in]a, b[, \forall h > 0$ tel que $(x + h) \in [a, b]$ et $(x - h) \in [a, b]$, on a

$$\frac{d\varphi}{dx}(x) = \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x-h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \quad (1.3)$$

□

Q. 4 Montrer que si $\varphi \in \mathcal{C}^4([a, b]; \mathbb{R})$ alors $\forall x \in]a, b[, \forall h > 0$ tel que $(x + h) \in [a, b]$ et $(x - h) \in [a, b]$, on a

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}(x) = \frac{\varphi(x+h) - 2\varphi(x) + \varphi(x-h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2) \quad (1.4)$$

□

Correction

R. 1 On rappelle le développement de Taylor à l'ordre r d'une fonction $f \in \mathcal{C}^{r+1}([a, b]; \mathbb{R})$ $\forall x \in [a, b], \forall \square \in \mathbb{R}^*$ vérifiant $(x + \square) \in [a, b]$,

$$f(x + \square) = f(x) + \sum_{k=1}^r \frac{\square^k}{k!} f^{(k)}(x) + \mathcal{O}(\square^{r+1}) \quad (1.5)$$

où $f^{(k)}(x) = \frac{d^k f}{dx^k}(x)$.

On peut ici utiliser un développement de Taylor à l'ordre $r = 1$ de φ car $\varphi \in \mathcal{C}^2([a, b]; \mathbb{R})$ avec $\square = h$ dans (1.5).

Soient $x \in [a, b]$ et $h \in \mathbb{R}^{*+}$, tels que $(x + h) \in [a, b]$ (donc nécessairement $x \in [a, b[$) on a

$$\varphi(x + h) = \varphi(x) + h\varphi^{(1)}(x) + \mathcal{O}(h^2)$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \varphi^{(1)}(x) &= \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} - \frac{1}{h} \mathcal{O}(h^2) \\ &= \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} + \mathcal{O}(h). \end{aligned}$$

R. 2 On peut ici utiliser un développement de Taylor à l'ordre $r = 1$ de φ car $\varphi \in \mathcal{C}^2([a, b]; \mathbb{R})$ avec $\square = -h$ dans dans (1.5).

On peut ici utiliser un développement de Taylor à l'ordre 2 car $\varphi \in \mathcal{C}^2([a, b]; \mathbb{R})$.

Soient $x \in [a, b]$ et $h \in \mathbb{R}^{*+}$, tels que $(x - h) \in [a, b]$ (donc nécessairement $x \in]a, b[$) on a

$$\varphi(x - h) = \varphi(x) - h \varphi^{(1)}(x) + \mathcal{O}(h^2)$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \varphi^{(1)}(x) &= \frac{\varphi(x) - \varphi(x - h)}{h} + \frac{1}{h} \mathcal{O}(h^2) \\ &= \frac{\varphi(x) - \varphi(x - h)}{h} + \mathcal{O}(h). \end{aligned}$$

R. 3 On peut ici utiliser un développement de Taylor à l'ordre $r = 2$ de φ car $\varphi \in \mathcal{C}^3([a, b]; \mathbb{R})$.

Dans la formule (1.3), les termes $\varphi(x + h)$, $\varphi(x - h)$ apparaissent. Ceci suggère d'utiliser deux développements de Taylor, l'un en $x + h$ et l'autre en $x - h$.

Soient $x \in [a, b]$ et $h \in \mathbb{R}^{*+}$, tels que $(x + h) \in [a, b]$ et $(x - h) \in [a, b]$ (donc nécessairement $x \in]a, b[$).

On a alors

$$\begin{aligned} \varphi(x + h) &= \varphi(x) + h \varphi^{(1)}(x) + \frac{h^2}{2} \varphi^{(2)}(x) + \mathcal{O}(h^3), \\ \varphi(x - h) &= \varphi(x) - h \varphi^{(1)}(x) + \frac{h^2}{2} \varphi^{(2)}(x) + \mathcal{O}(h^3). \end{aligned}$$

Remarque. Attention ici, il faut bien voir que les \mathcal{O} dans les deux formules ne sont mathématiquement pas forcément identiques! En effet, en revenant aux développements de Taylor sans \mathcal{O} , pour la formule en $x + h$, il existe $\xi_+ \in]x, x + h[$ tel que

$$\mathcal{O}(h^3) = \frac{h^3}{3!} \varphi^{(3)}(\xi_+)$$

et pour la formule en $x - h$, il existe $\xi_- \in]x - h, x[$ tel que

$$\mathcal{O}(h^3) = -\frac{h^3}{3!} \varphi^{(3)}(\xi_-).$$

On effectuant la différence entre ces deux équations on obtient:

$$\varphi(x + h) - \varphi(x - h) = 2h \varphi^{(1)}(x) + \mathcal{O}(h^3)$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \varphi^{(1)}(x) &= \frac{\varphi(x + h) - \varphi(x - h)}{2h} + \frac{1}{2h} \mathcal{O}(h^3) \\ &= \frac{\varphi(x + h) - \varphi(x - h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \end{aligned}$$

R. 4 On peut ici utiliser un développement de Taylor à l'ordre $r = 3$ de φ car $\varphi \in \mathcal{C}^4([a, b]; \mathbb{R})$.

Dans la formule (1.4), les termes $\varphi(x + h)$, $\varphi(x - h)$ apparaissent. Ceci suggère d'utiliser deux développements de Taylor, l'un en $x + h$ et l'autre en $x - h$.

Soient $x \in [a, b]$ et $h \in \mathbb{R}^{*+}$, tels que $(x + h) \in [a, b]$ et $(x - h) \in [a, b]$ (donc nécessairement $x \in]a, b[$).

On a alors

$$\begin{aligned} \varphi(x + h) &= \varphi(x) + h \varphi^{(1)}(x) + \frac{h^2}{2} \varphi^{(2)}(x) + \frac{h^3}{3} \varphi^{(3)}(x) + \mathcal{O}(h^4), \\ \varphi(x - h) &= \varphi(x) - h \varphi^{(1)}(x) + \frac{h^2}{2} \varphi^{(2)}(x) - \frac{h^3}{3} \varphi^{(3)}(x) + \mathcal{O}(h^4). \end{aligned}$$

On effectuant la somme entre ces deux équations on obtient:

$$\varphi(x+h) + \varphi(x-h) = 2\varphi(x) + h^2 \varphi^{(2)}(x) + \mathcal{O}(h^4)$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \varphi^{(2)}(x) &= \frac{\varphi(x+h) - 2\varphi(x) + \varphi(x-h)}{h^2} + \frac{1}{h^2} \mathcal{O}(h^4) \\ &= \frac{\varphi(x+h) - 2\varphi(x) + \varphi(x-h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2) \end{aligned}$$

◇

EXERCICE 2

Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction suffisamment régulière, $x \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}^{+*}$.

Q. 1 Montrer que

$$\frac{d\varphi}{dx}(x) = \frac{-3\varphi(x) + 4\varphi(x+h) - \varphi(x+2h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \quad (2.6)$$

□

Q. 2 Montrer que

$$\frac{d\varphi}{dx}(x) = \frac{3\varphi(x) - 4\varphi(x-h) + \varphi(x-2h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \quad (2.7)$$

□

Correction

R. 1 Soit φ une fonction suffisamment régulière et $h > 0$

Pour cela, on écrit les deux développements de Taylor en $x+h$ et $x+2h$.

Il existe $\xi_1^+ \in]x, x+h[$ tel que

$$\varphi(x+h) = \varphi(x) + h \frac{d\varphi}{dx}(x) + \frac{h^2}{2!} \frac{d^2\varphi}{dx^2}(x) + \frac{h^3}{3!} \frac{d^3\varphi}{dx^3}(\xi_1^+) \quad (2.8)$$

et Il existe $\xi_2^+ \in]x, x+2h[$ tel que

$$\varphi(x+2h) = \varphi(x) + (2h) \frac{d\varphi}{dx}(x) + \frac{(2h)^2}{2!} \frac{d^2\varphi}{dx^2}(x) + \frac{(2h)^3}{3!} \frac{d^3\varphi}{dx^3}(\xi_2^+) \quad (2.9)$$

L'objectif est d'obtenir, par une combinaison linéaire entre ces deux formules, une nouvelle équation ne comportant plus de termes en $\frac{d^2\varphi}{dx^2}$. En effectuant $4 \times (2.8) - (2.9)$ on obtient

$$4\varphi(x+h) - \varphi(x+2h) = 3\varphi(x) + 2h \frac{d\varphi}{dx}(x) + 4 \frac{h^3}{3!} \frac{d^3\varphi}{dx^3}(\xi_1^+) - \frac{(2h)^3}{3!} \frac{d^3\varphi}{dx^3}(\xi_2^+)$$

On en déduit

$$\frac{d\varphi}{dx}(x) = \frac{-3\varphi(x) + 4\varphi(x+h) - \varphi(x+2h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2)$$

R. 2 Soit φ une fonction suffisamment régulière et $h > 0$.

Pour cela, on écrit les deux développements de Taylor en $x-h$ et $x-2h$.

Il existe $\xi_1^- \in]x-h, x[$ tel que

$$\varphi(x-h) = \varphi(x) - h \frac{d\varphi}{dx}(x) + \frac{(-h)^2}{2!} \frac{d^2\varphi}{dx^2}(x) + \frac{(-h)^3}{3!} \frac{d^3\varphi}{dx^3}(\xi_1^-) \quad (2.10)$$

et il existe $\xi_2^- \in]x - 2h, x[$ tel que

$$\varphi(x - 2h) = \varphi(x) + (-2h) \frac{d\varphi}{dx}(x) + \frac{(-2h)^2}{2!} \frac{d^2\varphi}{dx^2}(x) + \frac{(-2h)^3}{3!} \frac{d^3\varphi}{dx^3}(\xi_2^+) \quad (2.11)$$

L'objectif est d'obtenir, par une combinaison linéaire entre ces deux formules, une nouvelle équation ne comportant plus de termes en $\frac{d^2\varphi}{dx^2}$. En effectuant $4 \times (2.10) - (2.11)$ on obtient

$$4\varphi(x - h) - \varphi(x - 2h) = 3\varphi(x) - 2h \frac{d\varphi}{dx}(x) + 4 \frac{(-h)^3}{3!} \frac{d^3\varphi}{dx^3}(\xi_1^-) - \frac{(-2h)^3}{3!} \frac{d^3\varphi}{dx^3}(\xi_2^-)$$

On en déduit

$$\frac{d\varphi}{dx}(x) = \frac{3\varphi(x) - 4\varphi(x - h) + \varphi(x - 2h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2)$$

◇

EXERCICE 3

Soit $f \in \mathcal{C}^3([a, b]; \mathbb{R})$. On note t^n , $n \in \llbracket 0, N \rrbracket$, une discrétisation **régulière** de $[a, b]$ de pas h . On note $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{N+1}$ le vecteur défini par $F_{n+1} = f(t^n)$, $\forall n \in \llbracket 0, N \rrbracket$.

Q. 1 a. Déterminer en fonction de h et \mathbf{F} , un vecteur $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{N+1}$ vérifiant

$$V_{n+1} = f'(t^n) + \mathcal{O}(h), \quad \forall n \in \llbracket 0, N \rrbracket.$$

b. Ecrire une fonction algorithmique, nommée `Derive1Ordre1`, permettant, à partir du vecteur \mathbf{F} et de la discrétisation régulière, de calculer le vecteur \mathbf{V} précédent. □

Q. 2 a. Connaissant uniquement h et le vecteur \mathbf{F} , déterminer un vecteur $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{N+1}$ vérifiant

$$W_n = f'(t^n) + \mathcal{O}(h^2), \quad \forall n \in \llbracket 0, N \rrbracket$$

b. Ecrire une fonction algorithmique, nommée `Derive1Ordre2`, permettant, à partir du vecteur \mathbf{F} et de la discrétisation régulière, de calculer le vecteur \mathbf{W} précédent. □



Correction

R. 1 a. On a $h = (b - a)/N$ et $t^n = a + nh$, $\forall n \in \llbracket 0, N \rrbracket$. Par la formule de Taylor, on obtient respectivement les formules progressives et régressives d'ordre 1 suivantes (voir Lemme ??)

$$\frac{f(t+h) - f(t)}{h} = f'(t) + \mathcal{O}(h) \quad \text{et} \quad \frac{f(t) - f(t-h)}{h} = f'(t) + \mathcal{O}(h).$$

On va utiliser ces formules en $t = t^n$. On note que la formule progressive n'est pas utilisable en $t = t^N$ (car $t^N + h = b + h \notin [a, b]!$) et que la formule régressive n'est pas utilisable en $t = t^0$ (car $t^0 - h = a - h \notin [a, b]!$). Plus précisément, on a

$$\frac{f(t^{n+1}) - f(t^n)}{h} = f'(t^n) + \mathcal{O}(h), \quad \forall n \in \llbracket 0, N \llbracket, \quad (3.12)$$

$$\frac{f(t^n) - f(t^{n-1})}{h} = f'(t^n) + \mathcal{O}(h), \quad \forall n \in \llbracket 0, N \rrbracket \quad (3.13)$$

On peut alors construire le vecteur \mathbf{V} en prenant

$$\begin{aligned} V_1 &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{f(t^1) - f(t^0)}{h} = f'(t^0) + \mathcal{O}(h), & \text{formule progressive (3.12) avec } n = 0 \\ V_{N+1} &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{f(t^N) - f(t^{N-1})}{h} = f'(t^N) + \mathcal{O}(h), & \text{formule régressive (3.13) avec } n = N \end{aligned}$$

et pour les points strictement intérieurs les deux formules sont possible :

$$\begin{aligned} V_n &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{f(t^{n+1}) - f(t^n)}{h} = f'(t^n) + \mathcal{O}(h), & \text{formule progressive (3.12) avec } n \in]0, N[\\ V_n &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{f(t^n) - f(t^{n-1})}{h} = f'(t^n) + \mathcal{O}(h), & \text{formule régressive (3.13) avec } n \in]0, N[\end{aligned}$$

En choisissant par exemple la formule progressive pour les points intérieurs, on obtient en fonction de \mathbf{F} et h

$$\begin{aligned} V_1 &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{F_2 - F_1}{h} = f'(t^0) + \mathcal{O}(h) \\ \forall n \in]0, N[, V_n &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{F_{n+1} - F_n}{h} = f'(t^n) + \mathcal{O}(h) \\ V_{N+1} &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{F_{N+1} - F_N}{h} = f'(t^N) + \mathcal{O}(h). \end{aligned}$$

b. On représente tout d'abord les vecteurs \mathbf{F} et \mathbf{V} en Figure 1.

\mathbf{F}	$f(t^0)$	$f(t^1)$	\dots	$f(t^{n-1})$	\dots	$f(t^{N-1})$	$f(t^N)$
	$\mathbf{F}(1)$	$\mathbf{F}(2)$		$\mathbf{F}(n)$		$\mathbf{F}(N)$	$\mathbf{F}(N+1)$
\mathbf{V}	$f'(t^0)$ + $\mathcal{O}(h)$	$f'(t^1)$ + $\mathcal{O}(h)$	\dots	$f'(t^{n-1})$ + $\mathcal{O}(h)$	\dots	$f'(t^{N-1})$ + $\mathcal{O}(h)$	$f'(t^N)$ + $\mathcal{O}(h)$
	$\mathbf{V}(1)$	$\mathbf{V}(2)$		$\mathbf{V}(n)$		$\mathbf{V}(N)$	$\mathbf{V}(N+1)$

Figure 1: Représentation mémoire du vecteur $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{N+1}$ et du vecteur $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{N+1}$.

En utilisant les formules trouvées précédemment, la fonction algorithmique peut s'écrire sous la forme :

Algorithme 1 Calcul numérique de dérivées premières d'ordre 1 d'une fonction f définie sur un intervalle en utilisant uniquement les valeurs de f aux points $(t^n)_{n=0}^N$ d'une discrétisation régulière de cet intervalle. Les approximations sont calculées en tous les points de la discrétisation.

Données : \mathbf{F} : vecteur de \mathbb{R}^{N+1} tel que
 $F_{n+1} = f(t^n), \forall n \in \llbracket 0, N \rrbracket$.
 h : nombre réel strictement positif.

Résultat : \mathbf{V} : vecteur de \mathbb{R}^{N+1} tel que
 $V_{n+1} = f'(t^n) + \mathcal{O}(h), \forall n \in \llbracket 0, N \rrbracket$.

```

1: Fonction  $\mathbf{V} \leftarrow \text{Derive1Ordre1}(h, \mathbf{F})$ 
2:    $V(1) \leftarrow (F(2) - F(1))/h$ 
3:   Pour  $n \leftarrow 2$  à  $N$  faire
4:      $V(n) \leftarrow (F(n+1) - F(n))/h$ 
5:   Fin Pour
6:    $V(N+1) \leftarrow (F(N+1) - F(N))/h$ 
7: Fin Fonction

```

D'autres façons de présenter le problème sont possibles mais les données peuvent différer de celles de l'énoncé. Par exemple une autre fonction algorithmique pourrait être

Algorithme 2 Approximations d'ordre 1 de dérivées premières d'une fonction f définie sur un intervalle $[a, b]$ en utilisant uniquement les valeurs de f aux points $(t^n)_{n=0}^N$ d'une discrétisation régulière de cet intervalle. Les approximations sont calculées en tous les points de la discrétisation.

Données : f : $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$
 a, b : deux réels, $a < b$,
 N : nombre de pas de discrétisation

Résultat : \mathbf{V} : vecteur de \mathbb{R}^{N+1} tel que $V_{n+1} = f'(t^n) + \mathcal{O}(h)$
avec $(t^n)_{n=0}^N$ discrétisation régulière de $[a, b]$.

```

1: Fonction  $\mathbf{V} \leftarrow \text{DeriveOrdre1-v1}(f, a, b, N)$ 
2:    $t \leftarrow \text{DisReg}(a, b, N)$  ▷ fonction retournant la discrétisation régulière...
3:    $h \leftarrow (b - a)/N$ 
4:    $V(1) \leftarrow (f(t(2)) - f(t(1)))/h$ 
5:   Pour  $n \leftarrow 2$  à  $N$  faire
6:      $V(n) \leftarrow (f(t(n+1)) - f(t(n)))/h$ 
7:   Fin Pour
8:    $V(N+1) \leftarrow (f(t(N+1)) - f(t(N)))/h$ 
9: Fin Fonction

```

R. 2 a. Du lemme ??, on a la formule centrée d'ordre 2

$$\frac{f(t+h) - f(t-h)}{2h} = f'(t) + \mathcal{O}(h^2).$$

On va utiliser cette formule en $t = t^n$. On note que la formule n'est pas utilisable en $t = t^N = b$ et $t = t^0 = a$. On obtient

$$f'(t^n) = \frac{f(t^{n+1}) - f(t^{n-1})}{2h} + \mathcal{O}(h^2), \quad \forall n \in \llbracket 0, N \rrbracket. \quad (3.14)$$

Il reste donc à établir une formule *progressive* en t^0 d'ordre 2 (i.e. une formule utilisant les points t^0, t^1, t^2, \dots) et une formule *régressive* en t^N d'ordre 2 (i.e. une formule utilisant les points $t^N, t^{N-1}, t^{N-2}, \dots$).

De manière générique pour établir une formule *progressive* en t d'ordre 2 approchant $f'(t)$, on écrit les deux formules de Taylor aux points $t+h$ et $t+2h$.

- En $t + h$ on a

$$f(t + h) = f(t) + hf'(t) + \frac{h^2}{2!} f^{(2)}(t) + \mathcal{O}(h^3). \quad (3.15)$$

Plus précisément, on a l'existence d'un $\xi_1 \in]t, t + h[$ tel que l'on peut remplacer le $\mathcal{O}(h^3)$ de (3.15) par $\frac{h^3}{3!} f^{(3)}(\xi_1)$.

- En $t + 2h$ on a,

$$f(t + 2h) = f(t) + (2h)f'(t) + \frac{(2h)^2}{2!} f^{(2)}(t) + \mathcal{O}(h^3). \quad (3.16)$$

Plus précisément, on a l'existence d'un $\xi_2 \in]t, t + 2h[$ tel que l'on peut remplacer le $\mathcal{O}(h^3)$ de (3.15) par $\frac{(2h)^3}{3!} f^{(3)}(\xi_2)$.

On va utiliser les formules de Taylor avec les restes explicites mais il est tout à fait possible d'utiliser celles avec les restes sous forme de $\mathcal{O}(h^3)$.

L'objectif étant d'obtenir une formule d'ordre 2 en t pour approcher $f'(t)$, on va éliminer les termes en $f^{(2)}(t)$ en effectuant la combinaison $4 \times (3.15) - (3.16)$.

On obtient alors

$$4f(t + h) - f(t + 2h) = 3f(t) + 2hf'(t) + 4\frac{h^3}{3!} f^{(3)}(\xi_1) - \frac{(2h)^3}{3!} f^{(3)}(\xi_2)$$

et donc

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{-3f(t) + 4f(t + h) - f(t + 2h)}{2h} - 4\frac{h^2}{3!} f^{(3)}(\xi_1) + \frac{2^3 h^2}{3!} f^{(3)}(\xi_2) \\ &= \frac{-3f(t) + 4f(t + h) - f(t + 2h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \end{aligned}$$

Cette dernière formule permet alors l'obtention d'une formule d'ordre 2 en $t = t^0 = a$:

$$f'(t^0) = \frac{-3f(t^0) + 4f(t^1) - f(t^2)}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \quad (3.17)$$

De la même manière pour établir une formule *régressive* en t d'ordre 2 approchant $f'(t)$, on écrit les deux formules de Taylor aux points $t - h$ et $t - 2h$:

- En $t - h$ on a

$$f(t - h) = f(t) + (-h)f'(t) + \frac{(-h)^2}{2!} f^{(2)}(t) + \mathcal{O}(h^3), \quad (3.18)$$

- En $t - 2h$ on a

$$f(t - 2h) = f(t) + (-2h)f'(t) + \frac{(-2h)^2}{2!} f^{(2)}(t) + \mathcal{O}(h^3), \quad (3.19)$$

L'objectif étant d'obtenir une formule d'ordre 2 en t pour approcher $f'(t)$, on va éliminer les termes en $f^{(2)}(t)$ en effectuant la combinaison $4 \times (3.18) - (3.19)$. On obtient alors

$$4f(t - h) - f(t - 2h) = 3f(t) - 2hf'(t) + \mathcal{O}(h^3)$$

car toute combinaison de $\mathcal{O}(h^3)$ reste en $\mathcal{O}(h^3)$. On obtient donc

$$f'(t) = \frac{3f(t) - 4f(t - h) + f(t - 2h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2).$$

Cette dernière formule permet alors l'obtention d'une formule d'ordre 2 en $t = t^N = b$:

$$f'(t^N) = \frac{3f(t^N) - 4f(t^{N-1}) + f(t^{N-2})}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \quad (3.20)$$

On peut alors construire le vecteur \mathbf{W} en utilisant les formules (3.14), (3.17) et (3.20) :

$$W_1 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{-3f(t^0) + 4f(t^1) - f(t^2)}{2h} = f'(t^0) + \mathcal{O}(h^2), \quad \text{formule progressive (3.17)}$$

$$W_{N+1} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{3f(t^N) - 4f(t^{N-1}) + f(t^{N-2})}{2h} = f'(t^N) + \mathcal{O}(h^2), \quad \text{formule régressive (3.20)}$$

et pour les points strictement intérieurs

$$W_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f(t^{n+1}) - f(t^{n-1})}{2h} = f'(t^n) + \mathcal{O}(h^2), \quad \text{formule centrée (3.14) avec } n \in \llbracket 0, N \rrbracket$$

On obtient alors en fonction de \mathbf{F} et h

$$\begin{aligned} W_1 &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{-3F_1 + 4F_2 - F_3}{2h} &&= f'(t^0) + \mathcal{O}(h^2) \\ \forall n \in \llbracket 0, N \rrbracket, W_n &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{F_{n+1} - F_{n-1}}{2h} &&= f'(t^n) + \mathcal{O}(h^2) \\ W_{N+1} &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{3F_{N+1} - 4F_N + F_{N-1}}{2h} &&= f'(t^N) + \mathcal{O}(h). \end{aligned}$$

b. On représente tout d'abord les vecteurs \mathbf{F} et \mathbf{W} en Figure 2.

\mathbf{F}	$f(t^0)$	$f(t^1)$	\dots	$f(t^{n-1})$	\dots	$f(t^{N-1})$	$f(t^N)$
	$\mathbf{F}(1)$	$\mathbf{F}(2)$		$\mathbf{F}(n)$		$\mathbf{F}(N)$	$\mathbf{F}(N+1)$
\mathbf{W}	$f'(t^0)$ + $\mathcal{O}(h^2)$	$f'(t^1)$ + $\mathcal{O}(h^2)$	\dots	$f'(t^{n-1})$ + $\mathcal{O}(h^2)$	\dots	$f'(t^{N-1})$ + $\mathcal{O}(h^2)$	$f'(t^N)$ + $\mathcal{O}(h^2)$
	$\mathbf{W}(1)$	$\mathbf{W}(2)$		$\mathbf{W}(n)$		$\mathbf{W}(N)$	$\mathbf{W}(N+1)$

Figure 2: Représentation mémoire du vecteur $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{N+1}$ et du vecteur $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{N+1}$.

En utilisant les formules trouvées précédemment, la fonction algorithmique peut s'écrire sous la forme :

Algorithme 3 Approximations d'ordre 2 de dérivées premières d'une fonction f définie sur un intervalle en utilisant uniquement les valeurs de f aux points $(t^n)_{n=0}^N$ d'une discrétisation régulière de cet intervalle. Les approximations sont calculées en tous les points de la discrétisation.

Données : \mathbf{F} : vecteur de \mathbb{R}^{N+1} tel que
 $F_{n+1} = f(t^n), \forall n \in \llbracket 0, N \rrbracket$.
 h : nombre réel strictement positif.

Résultat : \mathbf{W} : vecteur de \mathbb{R}^{N+1} tel que
 $W_{n+1} = f'(t^n) + \mathcal{O}(h^2), \forall n \in \llbracket 0, N \rrbracket$.

```

1: Fonction  $\mathbf{W} \leftarrow \text{Derive1Ordre2}(h, \mathbf{F})$ 
2:    $W(1) \leftarrow (-3 * F(1) + 4 * F(2) - F(3)) / (2 * h)$ 
3:   Pour  $i \leftarrow 2$  à  $N$  faire
4:      $W(i) \leftarrow (F(i+1) - F(i-1)) / (2 * h)$ 
5:   Fin Pour
6:    $W(N+1) \leftarrow (3 * F(N+1) - 4 * F(N) + F(N-1)) / (2 * h)$ 
7: Fin Fonction

```

D'autres façons de présenter le problème sont possibles mais les données peuvent différer de celles de l'énoncé. Par exemple une autre fonction algorithmique pourrait être

Algorithme 4 Approximations d'ordre 2 de dérivées premières d'une fonction f définie sur un intervalle $[a, b]$ calculées aux points de la discrétisation régulière de $[a, b]$ avec N pas de discrétisation. Les approximations sont calculées en tous les points de la discrétisation

Données : f : $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$
 a, b : deux réels, $a < b$,
 N : nombre de pas de discrétisation

Résultat : W : vecteur de \mathbb{R}^{N+1} tel que $W_{n+1} = f'(t^n) + \mathcal{O}(h^2)$
avec $(t^n)_{n=0}^N$ discrétisation régulière de $[a, b]$.

```

1: Fonction W ← Derive1Ordre2-v1( f, a, b, N )
2:   t ← DisReg(a, b, N)                                ▷ fonction retournant la discrétisation régulière...
3:   h ← (b - a)/N
4:   W(1) ← (-3 * f(t(1)) + 4 * f(t(2)) - f(t(3)))/(2 * h)
5:   Pour i ← 2 à N faire
6:     W(i) ← (f(t(i + 1)) - f(t(i - 1)))/(2 * h)
7:   Fin Pour
8:   W(N + 1) ← (3 * f(t(N + 1)) - 4 * f(t(N)) + f(t(N - 1)))/(2 * h)
9: Fin Fonction

```

◇

EXERCICE 4

On suppose écrites les fonctions Matlab/Octave `Derive1Order1` et `Derive1Order2` correspondant aux fonctions algorithmiques de l'exercice ???. Leurs syntaxes sont les suivantes:

$V = \text{Derive1Ordre1}(h, F)$ et $W = \text{Derive1Ordre2}(h, F)$

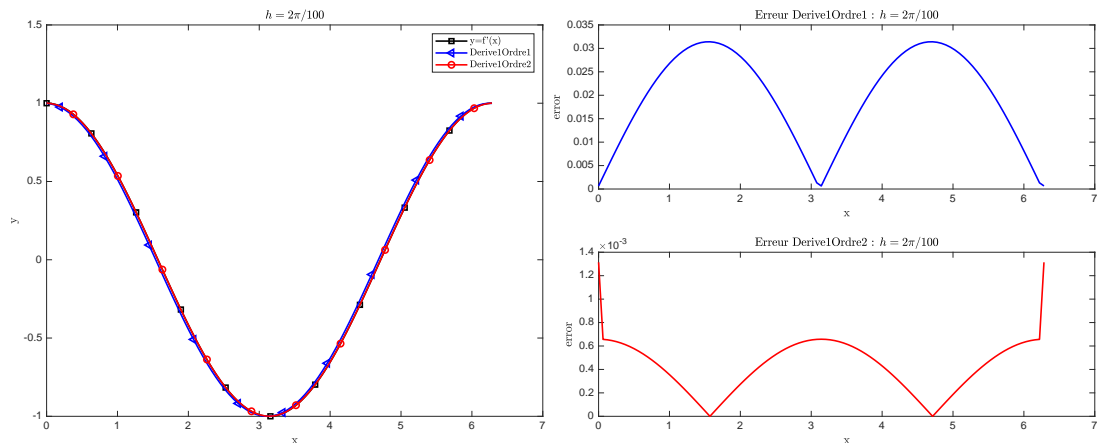
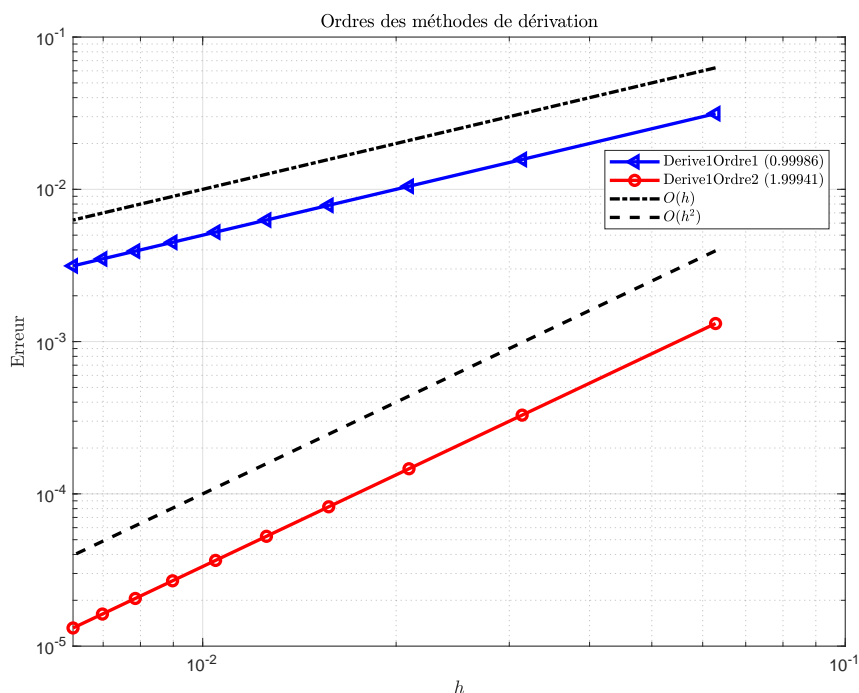


Figure 3: Avec $f(x) = \sin(x)$, $a = 0$, $b = 2\pi$, $N = 100$, à gauche, les différentes dérivées, à droite les erreurs commises par les deux fonctions.

Q. 1 Ecrire un programme Matlab/Octave permettant de reproduire ces deux graphiques. □

EXERCICE 5

Voici une figure mettant en évidence l'ordre des méthodes utilisées dans les fonctions `Derive1Order1` et `Derive1Order2` de l'exercice précédent



On suppose écrites les fonctions Matlab/Octave `Derive1Order1` et `Derive1Order2` correspondant aux fonctions algorithmiques de l'exercice ???. Leurs syntaxes sont les suivantes:

$$V = \text{Derive1Ordre1}(h, F) \quad \text{et} \quad W = \text{Derive1Ordre2}(h, F)$$

Q. 1 a. *Ecrire un programme Matlab/Octave permettant de calculer l'ensemble des données nécessaires à la représentation graphique de l'ordre des deux méthodes (voir figure).*

b. *A l'aide de ces données, calculer numériquement l'ordre des deux méthodes.*

□

Les commandes Matlab/Octave permettant de représenter des données en échelles logarithmique sont `loglog`, `semilogx` et `semilogy`. Elles s'utilisent globalement comme la fonction `plot`.

Q. 2 *Ajouter au programme précédent le code permettant de reproduire la figure.*

□