Méthodes Numériques II
Chapitre 2: Dérivation numérique
Exercices

Exercice 1

Soit $\varphi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

Q. 1 *Montrer que si* $\varphi \in \mathcal{C}^2([a,b];\mathbb{R})$ *alors* $\forall x \in [a,b[$, $\forall h > 0$ *tel que* $(x+h) \in [a,b]$, *on a*

$$\frac{d\varphi}{dx}(x) = \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} + \mathcal{O}(h) \tag{1.1}$$

□

R. 1 On rappelle le développement de Taylor à l'ordre r d'une fonction $f \in \mathcal{C}^{r+1}([a,b];\mathbb{R})$
$\forall x \in [a,b]$, $\forall \square \in \mathbb{R}^*$ vérifiant $(x+\square) \in [a,b]$,

$$f(x+\square) = f(x) + \sum_{k=1}^{r} \frac{\square^k}{k!} f^{(k)}(x) + \mathcal{O}(\square^{r+1}) \tag{1.2}$$

où $f^{(k)}(x) = \frac{d^k f}{dx^k}(x)$.
On peut ici utiliser un développement de Taylor à l'ordre $r = 1$ de φ car $\varphi \in \mathcal{C}^2([a,b];\mathbb{R})$ avec $\square = h$ dans (1.2).
Soient $x \in [a,b]$ et $h \in \mathbb{R}^{*+}$, tels que $(x+h) \in [a,b]$ (donc nécessairement $x \in [a,b[$) on a

$$\varphi(x+h) = \varphi(x) + h\,\varphi^{(1)}(x) + \mathcal{O}(h^2)$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}
\varphi^{(1)}(x) &= \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} - \frac{1}{h}\mathcal{O}(h^2) \\
&= \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} + \mathcal{O}(h).
\end{aligned}$$

Q. 2 *Montrer que si* $\varphi \in \mathcal{C}^2([a,b];\mathbb{R})$ *alors* $\forall x \in]a,b]$, $\forall h > 0$ *tel que* $(x-h) \in [a,b]$, *on a*

$$\frac{d\varphi}{dx}(x) = \frac{\varphi(x) - \varphi(x-h)}{h} + \mathcal{O}(h) \tag{1.3}$$

□

R. 2 On peut ici utiliser un développement de Taylor à l'ordre $r = 1$ de φ car $\varphi \in \mathcal{C}^2([a,b];\mathbb{R})$ avec $\square = -h$ dans dans (1.2).
On peut ici utiliser un développement de Taylor à l'ordre 2 car $\varphi \in \mathcal{C}^2([a,b];\mathbb{R})$.
Soient $x \in [a,b]$ et $h \in \mathbb{R}^{*+}$, tels que $(x-h) \in [a,b]$ (donc nécessairement $x \in]a,b]$) on a

$$\varphi(x-h) = \varphi(x) - h\,\varphi^{(1)}(x) + \mathcal{O}(h^2)$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}\varphi^{(1)}(x) &= \frac{\varphi(x)-\varphi(x-h)}{h} + \frac{1}{h}\,\mathcal{O}(h^2)\\ &= \frac{\varphi(x)-\varphi(x-h)}{h} + \mathcal{O}(h).\end{aligned}$$

Q. 3 *Montrer que si* $\varphi \in \mathcal{C}^3([a,b];\mathbb{R})$ *alors* $\forall x \in]a,b[$, $\forall h > 0$ *tel que* $(x+h) \in [a,b]$ *et* $(x-h) \in [a,b]$, *on a*

$$\frac{d\varphi}{dx}(x) = \frac{\varphi(x+h)-\varphi(x-h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \tag{1.4}$$

□

R. 3 On peut ici utiliser un développement de Taylor à l'ordre $r = 2$ de φ car $\varphi \in \mathcal{C}^3([a,b];\mathbb{R})$.
Dans la formule (1.4), les termes $\varphi(x+h)$, $\varphi(x-h)$ apparaissent. Ceci suggère d'utiliser deux développement de Taylor, l'un en $x+h$ et l'autre en $x-h$.
Soient $x \in [a,b]$ et $h \in \mathbb{R}^{*+}$, tels que $(x+h) \in [a,b]$ et $(x-h) \in [a,b]$ (donc nécessairement $x \in]a,b[$). On a alors

$$\begin{aligned}\varphi(x+h) &= \varphi(x) + h\,\varphi^{(1)}(x) + \frac{h^2}{2}\,\varphi^{(2)}(x) + \mathcal{O}(h^3),\\ \varphi(x-h) &= \varphi(x) - h\,\varphi^{(1)}(x) + \frac{h^2}{2}\,\varphi^{(2)}(x) + \mathcal{O}(h^3).\end{aligned}$$

Remarque. *Attention ici, il faut bien voir que les* $\mathcal{O}$ *dans les deux formules ne sont mathématiquement pas forcément identiques! En effet, en revenant aux développements de Taylor sans* $\mathcal{O}$, *pour la formule en* $x+h$, *il existe* $\xi_+ \in]x, x+h[$ *tel que*

$$\mathcal{O}(h^3) = \frac{h^3}{3!}\,\varphi^{(3)}(\xi_+)$$

et pour la formule en $x-h$, *il existe* $\xi_- \in]x-h, x[$ *tel que*

$$\mathcal{O}(h^3) = -\frac{h^3}{3!}\,\varphi^{(3)}(\xi_-).$$

On effectuant la différence entre ces deux équations on obtient:

$$\varphi(x+h) - \varphi(x-h) = 2h\,\varphi^{(1)}(x) + \mathcal{O}(h^3)$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}\varphi^{(1)}(x) &= \frac{\varphi(x+h)-\varphi(x-h)}{2h} + \frac{1}{2h}\,\mathcal{O}(h^3)\\ &= \frac{\varphi(x+h)-\varphi(x-h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2)\end{aligned}$$

Q. 4 *Montrer que si* $\varphi \in \mathcal{C}^4([a,b];\mathbb{R})$ *alors* $\forall x \in]a,b[$, $\forall h > 0$ *tel que* $(x+h) \in [a,b]$ *et* $(x-h) \in [a,b]$, *on a*

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}(x) = \frac{\varphi(x+h)-2\varphi(x)+\varphi(x-h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2) \tag{1.5}$$

□

R. 4 On peut ici utiliser un développement de Taylor à l'ordre $r = 3$ de φ car $\varphi \in \mathcal{C}^4([a,b];\mathbb{R})$.
Dans la formule (1.5), les termes $\varphi(x+h)$, $\varphi(x-h)$ apparaissent. Ceci suggère d'utiliser deux développement de Taylor, l'un en $x+h$ et l'autre en $x-h$.
Soient $x \in [a,b]$ et $h \in \mathbb{R}^{*+}$, tels que $(x+h) \in [a,b]$ et $(x-h) \in [a,b]$ (donc nécessairement $x \in]a,b[$). On a alors

$$\begin{aligned}
\varphi(x+h) &= \varphi(x) + h\,\varphi^{(1)}(x) + \frac{h^2}{2}\,\varphi^{(2)}(x) + \frac{h^3}{3}\,\varphi^{(3)}(x) + \mathcal{O}(h^4),\\
\varphi(x-h) &= \varphi(x) - h\,\varphi^{(1)}(x) + \frac{h^2}{2}\,\varphi^{(2)}(x) - \frac{h^3}{3}\,\varphi^{(3)}(x) + \mathcal{O}(h^4).
\end{aligned}$$

On effectuant la somme entre ces deux équations on obtient:

$$\varphi(x+h) + \varphi(x-h) = 2\varphi(x) + h^2\,\varphi^{(2)}(x) + \mathcal{O}(h^4)$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}
\varphi^{(2)}(x) &= \frac{\varphi(x+h) - 2\varphi(x) + \varphi(x-h)}{h^2} + \frac{1}{h^2}\,\mathcal{O}(h^4)\\
&= \frac{\varphi(x+h) - 2\varphi(x) + \varphi(x-h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2)
\end{aligned}$$

Exercice 2

Soit $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction suffisament régulière, $x \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}^{+*}$.

Q. 1 *Montrer que*

$$\frac{d\varphi}{dx}(x) = \frac{-3\varphi(x) + 4\varphi(x+h) - \varphi(x+2h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \tag{2.6}$$

□

R. 1 Soit φ une fonction suffisament régulière et $h > 0$
Pour celà, on écrit les deux développements de Taylor en $x+h$ et $x+2h$.
Il existe $\xi_1^+ \in]x, x+h[$ tel que

$$\varphi(x+h) = \varphi(x) + h\frac{d\varphi}{dx}(x) + \frac{h^2}{2!}\frac{d^2\varphi}{dx^2}(x) + \frac{h^3}{3!}\frac{d^3\varphi}{dx^3}(\xi_1^+) \tag{2.7}$$

et Il existe $\xi_2^+ \in]x, x+2h[$ tel que

$$\varphi(x+2h) = \varphi(x) + (2h)\frac{d\varphi}{dx}(x) + \frac{(2h)^2}{2!}\frac{d^2\varphi}{dx^2}(x) + \frac{(2h)^3}{3!}\frac{d^3\varphi}{dx^3}(\xi_2^+) \tag{2.8}$$

L'objectif est d'obtenir, par une combinaison linéaire entre ces deux formules, une nouvelle équation ne comportant plus de termes en $\frac{d^2\varphi}{dx^2}$. En effectuant $4 \times (2.7) - (2.8)$ on obtient

$$4\varphi(x+h) - \varphi(x+2h) = 3\varphi(x) + 2h\frac{d\varphi}{dx}(x) + 4\frac{h^3}{3!}\frac{d^3\varphi}{dx^3}(\xi_1^+) - \frac{(2h)^3}{3!}\frac{d^3\varphi}{dx^3}(\xi_2^+)$$

On en déduit

$$\frac{d\varphi}{dx}(x) = \frac{-3\varphi(x) + 4\varphi(x+h) - \varphi(x+2h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2)$$

Q. 2 *Montrer que*

$$\frac{d\varphi}{dx}(x) = \frac{3\varphi(x) - 4\varphi(x-h) + \varphi(x-2h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \tag{2.9}$$

□

R. 2 Soit φ une fonction suffisament régulière et $h > 0$.
Pour celà, on écrit les deux développements de Taylor en $x - h$ et $x - 2h$.
Il existe $\xi_1^- \in]x-h, x[$ tel que

$$\varphi(x-h) = \varphi(x) - h\frac{d\varphi}{dx}(x) + \frac{(-h)^2}{2!}\frac{d^2\varphi}{dx^2}(x) + \frac{(-h)^3}{3!}\frac{d^3\varphi}{dx^3}(\xi_1^-) \tag{2.10}$$

et Il existe $\xi_2^- \in]x-2h, x[$ tel que

$$\varphi(x-2h) = \varphi(x) + (-2h)\frac{d\varphi}{dx}(x) + \frac{(-2h)^2}{2!}\frac{d^2\varphi}{dx^2}(x) + \frac{(-2h)^3}{3!}\frac{d^3\varphi}{dx^3}(\xi_2^+) \tag{2.11}$$

L'objectif est d'obtenir, par une combinaison linéaire entre ces deux formules, une nouvelle équation ne comportant plus de termes en $\frac{d^2\varphi}{dx^2}$. En effectuant $4 \times (2.10) - (2.11)$ on obtient

$$4\varphi(x-h) - \varphi(x-2h) = 3\varphi(x) - 2h\frac{d\varphi}{dx}(x) + 4\frac{(-h)^3}{3!}\frac{d^3\varphi}{dx^3}(\xi_1^-) - \frac{(-2h)^3}{3!}\frac{d^3\varphi}{dx^3}(\xi_2^-)$$

On en déduit

$$\frac{d\varphi}{dx}(x) = \frac{3\varphi(x) - 4\varphi(x-h) + \varphi(x-2h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2)$$

Exercice 3

Soit $f \in \mathcal{C}^3([a,b];\mathbb{R})$. On note t^n, $n \in [\![0,N]\!]$, une discrétisation **régulière** de $[a,b]$ de pas h. On note $\boldsymbol{F} \in \mathbb{R}^{N+1}$ le vecteur défini par $F_{n+1} = f(t^n)$, $\forall n \in [\![0,N]\!]$.

Q. 1 *a. Déterminer en fonction de h et $\boldsymbol{F}$, un vecteur $\boldsymbol{V} \in \mathbb{R}^{N+1}$ vérifiant*

$$V_{n+1} = f'(t^n) + \mathcal{O}(h), \quad \forall n \in [\![0,N]\!].$$

b. Ecrire une fonction algorithmique, nommée Derive1Ordre1*, permettant, à partir du vecteur $\boldsymbol{F}$ et de la discrétisation régulière, de calculer le vecteur $\boldsymbol{V}$ précédent.*

□

R. 1 a. On a $h = (b-a)/N$ et $t^n = a + nh$, $\forall n \in [\![0,N]\!]$. Par la formule de Taylor, on obtient respectivement les formules progressives et régressives d'ordre 1 suivantes (voir Lemme **??**)

$$\frac{f(t+h)-f(t)}{h} = f'(t) + \mathcal{O}(h) \quad \text{et} \quad \frac{f(t)-f(t-h)}{h} = f'(t) + \mathcal{O}(h).$$

On va utiliser ces formules en $t = t^n$. On note que la formule progressive n'est pas utilisable en $t = t^N$ (car $t^N + h = b + h \notin [a,b]$!) et que la formule régressive n'est pas utilisable en $t = t^0$ (car $t^0 - h = a - h \notin [a,b]$!). Plus précisement, on a

$$\frac{f(t^{n+1})-f(t^n)}{h} = f'(t^n) + \mathcal{O}(h), \quad \forall n \in [\![0,N[\![, \tag{3.12}$$

$$\frac{f(t^n)-f(t^{n-1})}{h} = f'(t^n) + \mathcal{O}(h), \quad \forall n \in]\!]0,N]\!] \tag{3.13}$$

On peut alors construire le vecteur $\boldsymbol{V}$ en prenant

$$\begin{aligned} V_1 &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{f(t^1)-f(t^0)}{h} &&= f'(t^0) + \mathcal{O}(h), && \text{formule progressive (3.12) avec } n = 0 \\ V_{N+1} &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{f(t^N)-f(t^{N-1})}{h} &&= f'(t^N) + \mathcal{O}(h), && \text{formule régressive (3.13) avec } n = N \end{aligned}$$

et pour les points strictement intérieurs les deux formules sont possible :

$$\begin{aligned} V_n &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{f(t^{n+1})-f(t^n)}{h} &&= f'(t^n) + \mathcal{O}(h), && \text{formule progressive (3.12) avec } n \in]\!]0,N[\![\\ V_n &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{f(t^n)-f(t^{n-1})}{h} &&= f'(t^n) + \mathcal{O}(h), && \text{formule régressive (3.13) avec } n \in]\!]0,N[\![\end{aligned}$$

En choisissant par exemple la formule progressive pour les points intérieurs, on obtient en fonction de $\boldsymbol{F}$ et h

$$\begin{aligned} V_1 &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{F_2 - F_1}{h} &&= f'(t^0) + \mathcal{O}(h) \\ \forall n \in]\!]0,N[\![,\ V_n &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{F_{n+1} - F_n}{h} &&= f'(t^n) + \mathcal{O}(h) \\ V_{N+1} &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{F_{N+1} - F_N}{h} &&= f'(t^N) + \mathcal{O}(h). \end{aligned}$$

b. On représente tout d'abord les vecteurs **F** et **V** en Figure 1.

F	$f(t^0)$	$f(t^1)$	$\cdots$	$f(t^{n-1})$	$\cdots$	$f(t^{N-1})$	$f(t^N)$
	$\mathbf{F}(1)$	$\mathbf{F}(2)$		$\mathbf{F}(n)$		$\mathbf{F}(N)$	$\mathbf{F}(N+1)$

V	$f'(t^0)$ + $\mathcal{O}(h)$	$f'(t^1)$ + $\mathcal{O}(h)$	$\cdots$	$f'(t^{n-1})$ + $\mathcal{O}(h)$	$\cdots$	$f'(t^{N-1})$ + $\mathcal{O}(h)$	$f'(t^N)$ + $\mathcal{O}(h)$
	$\mathbf{V}(1)$	$\mathbf{V}(2)$		$\mathbf{V}(n)$		$\mathbf{V}(N)$	$\mathbf{V}(N+1)$

Figure 1: Représentation mémoire du vecteur $\boldsymbol{F} \in \mathbb{R}^{N+1}$ et du vecteur $\boldsymbol{V} \in \mathbb{R}^{N+1}$.

En utilisant les formules trouvées précédemment, la fonction algorithmique peut s'écrire sous la forme :

Algorithme 1 Calcul numérique de dérivées premières d'ordre 1 d'une fonction f définie sur un intervalle en utilisant uniquement les valeurs de f aux points $(t^n)_{n=0}^N$ d'une discrétisation régulière de cet intervalle. Les approximations sont calculées en tous les points de la discrétisation.

Données : $\boldsymbol{F}$: vecteur de $\mathbb{R}^{N+1}$ tel que $F_{n+1} = f(t^n)$, $\forall n \in [\![0, N]\!]$.
h : nombre réel strictement positif.
Résultat : $\boldsymbol{V}$: vecteur de $\mathbb{R}^{N+1}$ tel que $V_{n+1} = f'(t^n) + \mathcal{O}(h)$, $\forall n \in [\![0, N]\!]$.

Fonction $\boldsymbol{V} \leftarrow$ Derive1Ordre1($h, \boldsymbol{F}$)
  $V(1) \leftarrow (F(2) - F(1))/h$
  Pour $n \leftarrow 2$ **à** N **faire**
    $V(n) \leftarrow (F(n+1) - F(n))/h$
  Fin Pour
  $V(N+1) \leftarrow (F(N+1) - F(N))/h$
Fin Fonction

D'autres façons de présenter le problème sont possibles mais les données peuvent différer de celles de l'énoncé. Par exemple une autre fonction algorithmique pourrait être

Algorithme 2 Approximations d'ordre 1 de dérivées premières d'une fonction f définie sur un intervalle $[a, b]$ en utilisant uniquement les valeurs de f aux points $(t^n)_{n=0}^N$ d'une discrétisation régulière de cet intervalle. Les approximations sont calculées en tous les points de la discrétisation.

Données : f : $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$
a, b : deux réels, $a < b$,
N : nombre de pas de discrétisation
Résultat : $\boldsymbol{V}$: vecteur de $\mathbb{R}^{N+1}$ tel que $V_{n+1} = f'(t^n) + \mathcal{O}(h)$ avec $(t^n)_{n=0}^N$ discrétisation régulière de $[a, b]$.

Fonction $\boldsymbol{V} \leftarrow$ DeriveOrdre1-v1(f, a, b, N)
  $t \leftarrow$ DisReg(a, b, N) ▷ fonction retournant la discrétisation régulière...
  $h \leftarrow (b - a)/N$
  $V(1) \leftarrow (f(t(2)) - f(t(1))/h$
  Pour $n \leftarrow 2$ **à** N **faire**
    $V(n) \leftarrow (f(t(n+1)) - f(t(n)))/h$
  Fin Pour
  $V(N+1) \leftarrow (f(t(N+1)) - f(t(N))/h$
Fin Fonction

Q. 2 *a. Connaissant uniquement h et le vecteur $\boldsymbol{F}$, déterminer un vecteur $\boldsymbol{W} \in \mathbb{R}^{N+1}$ vérifiant*

$$\boldsymbol{W}_n = f'(t^n) + \mathcal{O}(h^2), \quad \forall n \in [\![0, N]\!]$$

b. Ecrire une fonction algorithmique, nommée Derive1Ordre2*, permettant, à partir du vecteur $\boldsymbol{F}$ et de la discrétisation régulière, de calculer le vecteur $\boldsymbol{W}$ précédent.*

□

R. 2 a. Du lemme **??**, on a la formule centrée d'ordre 2

$$\frac{f(t+h) - f(t-h)}{2h} = f'(t) + \mathcal{O}(h^2).$$

On va utiliser cette formule en $t = t^n$. On note que la formule n'est pas utilisable en $t = t^N = b$ et $t = t^0 = a$. On obtient

$$f'(t^n) = \frac{f(t^{n+1}) - f(t^{n-1})}{2h} + \mathcal{O}(h^2), \quad \forall n \in]\!]0, N[\![. \tag{3.14}$$

Il reste donc à établir une formule *progressive* en t^0 d'ordre 2 (i.e. une formule utilisant les points t^0, t^1, t^2, ...) et une formule *régressive* en t^N d'ordre 2 (i.e. une formule utilisant les points t^N, t^{N-1}, t^{N-2}, ...).

De manière générique pour établir une formule *progressive* en t d'ordre 2 approchant $f'(t)$, on écrit les deux formules de Taylor aux points $t+h$ et $t+2h$.

- En $t+h$ on a
$$f(t+h) = f(t) + hf'(t) + \frac{h^2}{2!} f^{(2)}(t) + \mathcal{O}(h^3). \tag{3.15}$$
Plus précisément, on a l'existence d'un $\xi_1 \in]t, t+h[$ tel que l'on peut remplacer le $\mathcal{O}(h^3)$ de (3.15) par $\dfrac{h^3}{3!} f^{(3)}(\xi_1)$.
- En $t+2h$ on a,
$$f(t+2h) = f(t) + (2h)f'(t) + \frac{(2h)^2}{2!} f^{(2)}(t) + \mathcal{O}(h^3). \tag{3.16}$$
Plus précisément, on a l'existence d'un $\xi_2 \in]t, t+2h[$ tel que l'on peut remplacer le $\mathcal{O}(h^3)$ de (3.15) par $\dfrac{(2h)^3}{3!} f^{(3)}(\xi_2)$.

On va utiliser les formules de Taylor avec les restes explicites mais il est tout à fait possible d'utiliser celles avec les restes sous forme de $\mathcal{O}(h^3)$.

L'objectif étant d'obtenir une formule d'ordre 2 en t pour approcher $f'(t)$, on va éliminer les termes en $f^{(2)}(t)$ en effectuant la combinaison $4 \times (3.15) - (3.16)$.

On obtient alors

$$4f(t+h) - f(t+2h) = 3f(t) + 2hf'(t) + 4\frac{h^3}{3!} f^{(3)}(\xi_1) - \frac{(2h)^3}{3!} f^{(3)}(\xi_2)$$

et donc

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{-3f(t) + 4f(t+h) - f(t+2h)}{2h} - 4\frac{h^2}{3!} f^{(3)}(\xi_1) + \frac{2^3h^2}{3!} f^{(3)}(\xi_2) \\ &= \frac{-3f(t) + 4f(t+h) - f(t+2h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \end{aligned}$$

Cette dernière formule permet alors l'obtention d'une formule d'ordre 2 en $t = t^0 = a$:

$$f'(t^0) = \frac{-3f(t^0) + 4f(t^1) - f(t^2)}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \tag{3.17}$$

De la même manière pour établir une formule *régressive* en t d'ordre 2 approchant $f'(t)$, on écrit les deux formules de Taylor aux points $t-h$ et $t-2h$:

- En $t-h$ on a

$$f(t-h) = f(t) + (-h)f'(t) + \frac{(-h)^2}{2!} f^{(2)}(t) + \mathcal{O}(h^3), \tag{3.18}$$

- En $t-2h$ on a

$$f(t-2h) = f(t) + (-2h)f'(t) + \frac{(-2h)^2}{2!} f^{(2)}(t) + \mathcal{O}(h^3), \tag{3.19}$$

L'objectif étant d'obtenir une formule d'ordre 2 en t pour approcher $f'(t)$, on va éliminer les termes en $f^{(2)}(t)$ en effectuant la combinaison $4 \times (3.18) - (3.19)$. On obtient alors

$$4f(t-h) - f(t-2h) = 3f(t) - 2hf'(t) + \mathcal{O}(h^3)$$

car toute combinaison de $\mathcal{O}(h^3)$ reste en $\mathcal{O}(h^3)$. On obtient donc

$$f'(t) \quad = \quad \frac{3f(t) - 4f(t-h) + f(t-2h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2).$$

Cette dernière formule permet alors l'obtention d'une formule d'ordre 2 en $t = t^N = b$:

$$f'(t^N) = \frac{3f(t^N) - 4f(t^{N-1}) + f(t^{N-2})}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \tag{3.20}$$

On peut alors construire le vecteur $\boldsymbol{W}$ en utilisant les formules (3.14), (3.17) et (3.20) :

$$\begin{aligned}
W_1 &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{-3f(t^0) + 4f(t^1) - f(t^2)}{2h} &&= f'(t^0) + \mathcal{O}(h^2), && \text{formule progressive (3.17)} \\
W_{N+1} &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{3f(t^N) - 4f(t^{N-1}) + f(t^{N-2})}{2h} &&= f'(t^N) + \mathcal{O}(h^2), && \text{formule régressive (3.20)}
\end{aligned}$$

et pour les points strictement intérieurs

$$W_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f(t^{n+1}) - f(t^{n-1})}{2h} \qquad = f'(t^n) + \mathcal{O}(h^2), \qquad \text{formule centrée (3.14) avec } n \in]\!]0, N[\![$$

On obtient alors en fonction de $\boldsymbol{F}$ et h

$$\begin{aligned}
W_1 &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{-3F_1 + 4F_2 - F_3}{2h} &&= f'(t^0) + \mathcal{O}(h^2) \\
\forall n \in]\!]0, N[\![,\ W_n &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{F_{n+1} - F_{n-1}}{2h} &&= f'(t^n) + \mathcal{O}(h^2) \\
W_{N+1} &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{3F_{N+1} - 4F_N + F_{N-1}}{2h} &&= f'(t^N) + \mathcal{O}(h).
\end{aligned}$$

b. On représente tout d'abord les vecteurs **F** et **W** en Figure 2.

F	$f(t^0)$	$f(t^1)$	$\cdots$	$f(t^{n-1})$	$\cdots$	$f(t^{N-1})$	$f(t^N)$
	$\mathbf{F}(1)$	$\mathbf{F}(2)$		$\mathbf{F}(n)$		$\mathbf{F}(N)$	$\mathbf{F}(N+1)$
W	$f'(t^0) + \mathcal{O}(h^2)$	$f'(t^1) + \mathcal{O}(h^2)$	$\cdots$	$f'(t^{n-1}) + \mathcal{O}(h^2)$	$\cdots$	$f'(t^{N-1}) + \mathcal{O}(h^2)$	$f'(t^N) + \mathcal{O}(h^2)$
	$\mathbf{W}(1)$	$\mathbf{W}(2)$		$\mathbf{W}(n)$		$\mathbf{W}(N)$	$\mathbf{W}(N+1)$

Figure 2: Représentation mémoire du vecteur $\boldsymbol{F} \in \mathbb{R}^{N+1}$ et du vecteur $\boldsymbol{W} \in \mathbb{R}^{N+1}$.

En utilisant les formules trouvées précédemment, la fonction algorithmique peut s'écrire sous la forme :

Algorithme 3 Approximations d'ordre 2 de dérivées premières d'une fonction f définie sur un intervalle en utilisant uniquemment les valeurs de f aux points $(t^n)_{n=0}^N$ d'une discrétisation régulière de cet intervalle. Les approximations sont calculées en tous les points de la discrétisation.

Données : $\boldsymbol{F}$: vecteur de $\mathbb{R}^{N+1}$ tel que $F_{n+1} = f(t^n)$, $\forall n \in [\![0, N]\!]$.
h : nombre réel strictement positif.
Résultat : $\boldsymbol{W}$: vecteur de $\mathbb{R}^{N+1}$tel que $W_{n+1} = f'(t^n) + \mathcal{O}(h^2)$, $\forall n \in [\![0, N]\!]$.

1: **Fonction** $\boldsymbol{W} \leftarrow$ Derive1Ordre2($h, \boldsymbol{F}$)
2: $W(1) \leftarrow (-3 * F(1) + 4 * F(2) - F(3))/(2 * h)$
3: **Pour** $i \leftarrow 2$ **à** N **faire**
4: $W(i) \leftarrow (F(i+1) - F(i-1))/(2 * h)$
5: **Fin Pour**
6: $W(N+1) \leftarrow (3 * F(N+1) - 4 * F(N) + F(N-1))/(2 * h)$
7: **Fin Fonction**

D'autres façons de présenter le problème sont possibles mais les données peuvent différer de celles de l'énoncé. Par exemple une autre fonction algorithmique pourrait être

Algorithme 4 Approximations d'ordre 2 de dérivées premières d'une fonction f définie sur un intervalle $[a, b]$ calculées aux points de de la discrétisation régulière de $[a, b]$ avec N pas de discrétisation. Les approximations sont calculées en tous les points de la discrétisation

Données : f : $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$
a, b : deux réels, $a < b$,
N : nombre de pas de discrétisation
Résultat : $\boldsymbol{W}$: vecteur de $\mathbb{R}^{N+1}$ tel que $W_{n+1} = f'(t^n) + \mathcal{O}(h^2)$ avec $(t^n)_{n=0}^N$ discrétisation régulière de $[a, b]$.

1: **Fonction** $\boldsymbol{W} \leftarrow$ Derive1Ordre2-v1(f, a, b, N)
2: $t \leftarrow$ DisReg(a, b, N) ▷ fonction retournant la discrétisation régulière...
3: $h \leftarrow (b-a)/N$
4: $W(1) \leftarrow (-3 * f(t(1)) + 4 * f(t(2)) - f(t(3)))/(2 * h)$
5: **Pour** $i \leftarrow 2$ **à** N **faire**
6: $W(i) \leftarrow (f(t(i+1)) - f(t(i-1)))/(2 * h)$
7: **Fin Pour**
8: $W(N+1) \leftarrow (3 * f(t(N+1)) - 4 * f(t(N)) + f(t(N-1)))/(2 * h)$
9: **Fin Fonction**

Exercice 4

On suppose écrites les fonctions Matlab/Octave Derive1Order1 et Derive1Order2 correspondant aux fonctions algorithmiques de l'exercice ??. Leurs syntaxes sont les suivantes:

V=Derive1Ordre1(h,F) et W=Derive1Ordre2(h,F)

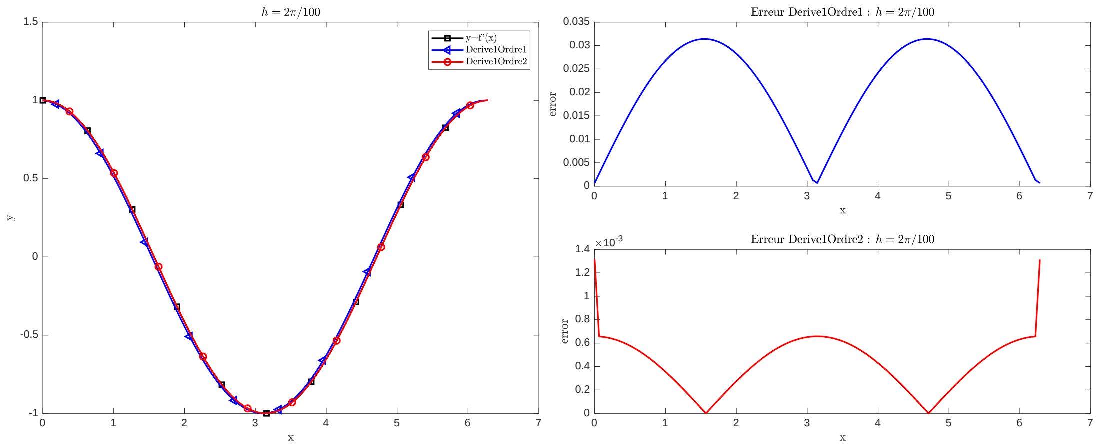
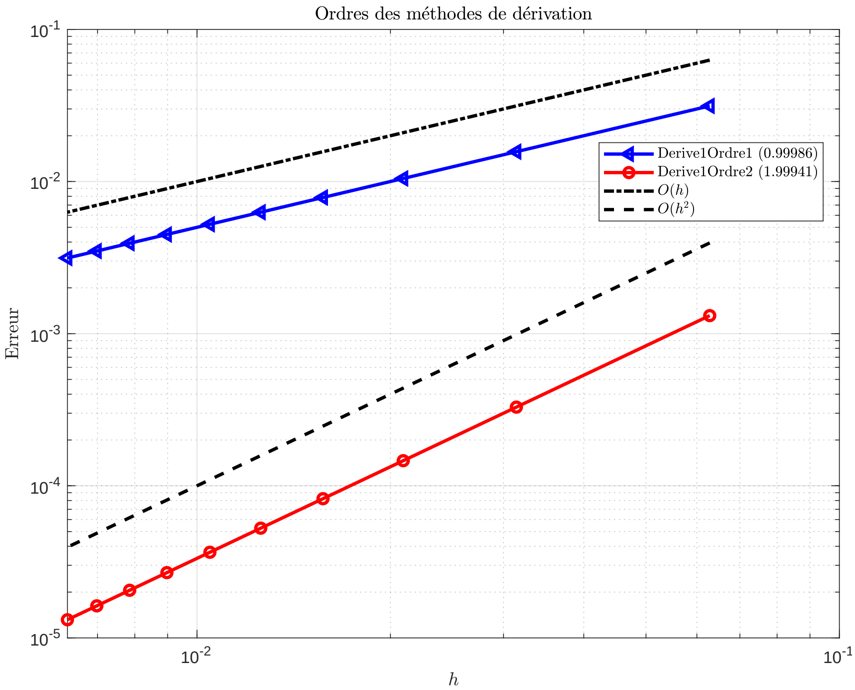


Figure 3: Avec $f(x) = sin(x)$, $a = 0$, $b = 2\pi$, $N = 100$, à gauche, les différentes dérivées, à droite les erreurs commises par les deux fonctions.

Q. 1 *Ecrire un programme Matlab/Octave permettant de reproduire ces deux graphiques.* □

Exercice 5

Voici une figure mettant en évidence l'ordre des méthodes utilisées dans les fonctions Derive1Order1 et Derive1Order2 de l'exercice précédent



On suppose écrites les fonctions Matlab/Octave Derive1Order1 et Derive1Order2 correspondant aux fonctions algorithmiques de l'exercice **??**. Leurs syntaxes sont les suivantes:

V=Derive1Ordre1(h,F) et W=Derive1Ordre2(h,F)

Q. 1 *a. Ecrire un programme Matlab/Octave permettant de calculer l'ensemble des données nécessaires à la représentation graphique de l'ordre des deux méthodes (voir figure).*

b. A l'aide de ces données, calculer numériquement l'ordre des deux méthodes.

□

Les commandes Matlab/Octave permettant de représenter des données en échelles logarithmique sont loglog, semilogx et semilogy. Elles s'utilisent globalement comme la fonction plot.

Q. 2 *Ajouter au programme précédent le code permettant de reproduire la figure.* □