Méthodes Numériques II
Chapitre 3: Equations Différentielles Ordinaires
Exercices - épisode 1

Exercice 1

Pour chacune des E.D.O. suivantes écrire le problème de Cauchy associé

$$(a)\quad \begin{cases} x''(t) + \alpha x'(t) + \beta\cos(x(t)) = \sin(t),\ t\in]0,2\pi] \\ x(0)=0,\ x'(0)=1. \end{cases}$$

$$(b)\quad \begin{cases} LCv''(t) + \left(\dfrac{L}{R_2} + R_1C\right)v'(t) + \left(\dfrac{R_1}{R_2}+1\right)v(t) = e,\ t\in]0,100] \\ v(0)=0,\ v'(0)=0. \end{cases}$$

$$(c)\quad \begin{cases} x''(t) = \mu(1-x^2(t))x'(t) - x(t),\ t\in]0,10] \\ x(0)=1,\ x'(0)=-1. \end{cases}$$

$$(d)\quad \begin{cases} y^{(3)}(t) - \cos(t)y^{(2)}(t) + 2\sin(t)y^{(1)}(t) - y(t) = 0,\ t\in]0,T] \\ y(0)=u_0,\ y^{(1)}(0)=v_0,\ y^{(2)}(0)=w_0. \end{cases}$$

$$(e)\quad \begin{cases} \forall t\in]0,T], & x_1''(t) - 2x_2'(t) + 3x_1'(t) + 4x_1(t)x_2(t) = \sin(t), \\ & x_2''(t) + 3x_1'(t) - 2x_2'(t) - 3x_1(t)x_2(t) = \cos(t), \\ & x_1(0)=0,\ x_1'(0)=-1,\ x_2(0)=1,\ x_2'(0)=-2. \end{cases}$$

Exercice 2

Déterminer le problème de Cauchy associé au modèle du Brusselator simplifié :

$$(\mathcal{B})\quad \begin{cases} X'(t) &=& 1+\alpha X^2(t)Y(t) - (\beta+1)X(t) \\ Y'(t) &=& -\alpha X^2(t)Y(t) + \beta X(t) \end{cases}$$

avec C.I. $X(0)=X_0$ et $Y(0)=Y_0$.

Exercice 3

Déterminer le problème de Cauchy associé au modèle du pendule pesant simplifié :

$$(\mathcal{P})\quad \theta^{(2)}(t) + \frac{g}{L}\sin(\theta(t)) = 0.$$

avec C.I. $\theta(0) = \theta_0$ et $\theta'(0) = \theta'_0$.

Exercice 4

On veut résoudre numériquement le problème $(\mathcal{P})$ suivant : trouver y telle que

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} y'(t) &= \cos(t) + 1, \ \forall t \in [0, 4\pi] \\ y(0) &= 0. \end{cases}$$

dont la solution exacte est $y(t) = \sin(t) + t$.
On rappelle le schéma d'Euler progressif pour la résolution d'un problème de Cauchy

$$(\mathcal{S}) \quad \begin{cases} y^{[n+1]} &= y^{[n]} + hf(t^n, y^{[n]}), \\ y^{[0]} & \text{donné.} \end{cases}$$

avec $(t^n)_{n0}^N$ discrétisation régulière de l'intervalle $[0, 4\pi]$ avec N pas de discrétisation.

Q. 1 *Expliquer en détail comment utiliser le schéma d'Euler progressif pour résoudre le problème $(\mathcal{P})$ en précisant entre autres les données, les inconnues, les dimensions des variables, lien entre $y^{[n+1]}$ et la fonction y, ...* □

Q. 2 *Soit a, b, $a < b$ deux réels. Ecrire une fonction* DisReg *retournant une discrétisation régulière de l'intervalle $[a; b]$ avec N pas de discrétisation.* □

Q. 3 *Ecrire une fonction* redEUPsca *retournant l'ensemble des couples $(t^n, y^{[n+1]})_{n=0}^N$ calculés par le schéma d'Euler progressif.* □

Q. 4 *Ecrire un algorithme complet de résolution de $(\mathcal{P})$ par le schéma d'Euler progressif.* □

Exercice 5

Soit le problème de Cauchy **vectoriel**

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}'(t) &= \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y}(t)), \quad \forall t \in [t^0, t^0 + T], \\ \boldsymbol{y}(t^0) &= \boldsymbol{y}_0 \in \mathbb{R}^m, \end{cases}$$

avec $\boldsymbol{f} : [t^0, t^0 + T] \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$. On souhaite écrire une fonction algorithmique redEUPVec permettant de résoudre ce problème de Cauchy (vectoriel) par le schéma **vectoriel** explicite d'Euler progressif

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}^{[n+1]} &= \boldsymbol{y}^{[n]} + h\boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]}), \ \forall n \in [\![0, N-1]\!] \\ \boldsymbol{y}^{[0]} &= \boldsymbol{y}_0 \end{cases}$$

avec $(t^n)_{n=0}^N$ la discrétisation régulière de $[t^0, t^0 + T]$ avec N pas de discrétisation et $\boldsymbol{y}^{[n]} = \begin{pmatrix} y_1^{[n]} \\ \vdots \\ y_m^{[n]} \end{pmatrix}$ et $\boldsymbol{y}^{[n]}) \approx \boldsymbol{y}(t^n)$. Cette fonction devra retourner l'ensemble des t^n et des $\boldsymbol{y}^{[n]}$ pour $n[\![0, N]\!]$.

Q. 1 *a. Rappeler précisement les données du problème de Cauchy* ***vectoriel****.*

b. Quelles sont les données de la fonction algorithmique redEUPVec *en précisant le type et la dimension pour chacune?*

c. Quelles sont les sorties/résultats de la fonction algorithmique redEUPVec *en précisant le type et la dimension pour chacun?*

□

On rappelle l'écriture simplifiée d'accès aux colonnes d'une matrice décrit en section **??**

Algorithmique		
fonction	*version simplifiée*	*Description mathématique*
$\boldsymbol{u} \leftarrow \text{getMatCol}(\mathbb{A}, j)$	$\boldsymbol{u} \leftarrow \mathbb{A}(:, j)$	$\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^m$ est déterminé par $\boldsymbol{u}_i = \mathbb{A}_{i,j}$, $\forall i \in [\![1, n]\!]$
$\mathbb{A} \leftarrow \text{setMatCol}(\mathbb{A}, \boldsymbol{u}, j)$	$\mathbb{A}(:, j) \leftarrow \boldsymbol{u}$	la colonne j de $\mathbb{A}$ est remplacée par $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^m$ et on a $\mathbb{A}_{i,j} = \boldsymbol{u}_i$, $\forall i \in [\![1, n]\!]$.

Table 1: Accès algorithmique aux colonnes d'une matrice $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ décrit en section **??**

Q. 2 *Ecrire la fonction algorithmique* redEUPVec *permettant de résoudre ce problème de Cauchy (vectoriel) par le schéma explicite d'Euler progressif. On utilisera l'écriture algorithmique simplifiée d'accès aux éléments d'une matrice (voir Table 1).* □

Q. 3 *Ecrire la fonction algorithmique* redEUPVecfun *permettant de résoudre ce problème de Cauchy (vectoriel) par le schéma explicite d'Euler progressif. On utilisera l'écriture algorithmique avec fonctions pour l'accès aux éléments d'une matrice (voir Table 1).* □

Exercice 6

Soit l'équation différentielle ordinaire linéaire du troisième ordre avec conditions initiales données par

$$\begin{aligned}&(1+t+t^2)\,y^{(3)}(t) + (3+6t)\,y^{(2)}(t) + 6\,y^{(1)}(t) = 6t, \qquad \forall t \in [0, T],\\ &y(0) = \alpha, \quad y^{(1)}(0) = \beta, \quad y^{(2)}(0) = \gamma.\end{aligned}$$

Ici $y^{(k)}$ note la dérivée k-ième de y.
Pour cette EDO, il existe une unique solution donnée par

$$y(t) = \frac{t^4 + 2\,At^2 + 4\,Bt + 4\,C}{4\,(t^2+t+1)}$$

avec $(A, B, C) \in \mathbb{R}^3$ vérifiant

$$C = \alpha, \quad B - C = \beta \quad \text{et} \quad A - 2\,B = \gamma.$$

On a aussi

$$\begin{aligned}y^{(1)}(t) &= \frac{t^3 + At + B}{t^2+t+1} - \frac{(t^4 + 2\,At^2 + 4\,Bt + 4\,C)(2\,t+1)}{4\,(t^2+t+1)^2}\\ y^{(2)}(t) &= \frac{3\,t^2 + A}{t^2+t+1} - \frac{2\,(t^3 + At + B)(2\,t+1)}{(t^2+t+1)^2} + \frac{(t^4 + 2\,At^2 + 4\,Bt + 4\,C)(2\,t+1)^2}{2\,(t^2+t+1)^3} - \frac{t^4 + 2\,At^2 + 4\,Bt + 4\,C}{2\,(t^2+t+1)^2}.\end{aligned}$$

Q. 1 *Déterminer le problème de Cauchy vectoriel associé à cette EDO* □

Dans la suite, on prendra $T = 10$, $\alpha = 6$, $\beta = -5$ et $\gamma = -2$.

Q. 2 *Ecrire un programme permettant de résoudre numériquement le problème de Cauchy associé à cette EDO à l'aide de la fonction algorithmique* $[\boldsymbol{t}, \mathbb{Y}] \leftarrow \text{redEUPvec}(f, t0, T, Y0, N)$ *(voir Exercice précédent).* □

On suppose que notre language algorithmique dispose d'une fonction graphique $\text{plot}(X, Y)$ reliant par des segments les points successifs

$$\big(X(1), Y(1)\big), \big(X(2), Y(2)\big), \dots, \big(X(end), Y(end)\big)$$

les tableaux X et Y ayant même longeurs et correspondent respectivement aux tableaux des abscisses et des ordonnées.
On pourra utiliser la version simplifiée du langage algorithmique.

Q. 3 *Donner les commandes permettant, après avoir utilisé le programme algorithmique précédent, de représenter graphiquement les approximations obtenues par le schéma, de*

$$\big(y(t^n)\big)_{n=0}^{N}, \quad \big(y^{(1)}(t^n)\big)_{n=0}^{N} \quad \textit{et} \quad \big(y^{(2)}(t^n)\big)_{n=0}^{N}$$

□

Q. 4 *Ecrire un programme algorithmique permettant de représenter graphiquement les solutions exactes aux points de discrétisation, c'est à dire*

$$\big(y(t^n)\big)_{n=0}^{N}, \quad \big(y^{(1)}(t^n)\big)_{n=0}^{N} \quad \textit{et} \quad \big(y^{(2)}(t^n)\big)_{n=0}^{N}$$

□

Q. 5 *Ecrire un programme algorithmique permettant de représenter graphiquement les erreurs numériques commises en valeurs absolues par le schéma pour les approximations de*

$$\big(y(t^n)\big)_{n=0}^{N}, \quad \big(y^{(1)}(t^n)\big)_{n=0}^{N} \quad \textit{et} \quad \big(y^{(2)}(t^n)\big)_{n=0}^{N}$$

□