

Méthodes Numériques II

Chapitre 3: Equations Différentielles Ordinaires

Exercices - épisode 2

EXERCICE 1

la méthode de Heun est donnée par

$$\mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{2} \mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]}) + \frac{h}{2} \mathbf{f}\left(t^{n+1}, \mathbf{y}^{[n]} + h\mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]})\right).$$

Q. 1 Ecrire la fonction algorithmique `REDHeunVec` permettant de résoudre un problème de Cauchy vectoriel par la méthode de Heun en utilisant au plus $2N$ évaluation de \mathbf{f} . \square

Q. 2 Ecrire un programme algorithmique permettant de retrouver numériquement l'ordre de cette méthode. \square

EXERCICE 2

la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 est donnée par

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1^{[n]} &= \mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]}) \\ \mathbf{k}_2^{[n]} &= \mathbf{f}\left(t^n + \frac{h}{2}, \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{2}\mathbf{k}_1^{[n]}\right) \\ \mathbf{k}_3^{[n]} &= \mathbf{f}\left(t^n + \frac{h}{2}, \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{2}\mathbf{k}_2^{[n]}\right) \\ \mathbf{k}_4^{[n]} &= \mathbf{f}\left(t^n + h, \mathbf{y}^{[n]} + h\mathbf{k}_3^{[n]}\right) \\ \mathbf{y}^{[n+1]} &= \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{6}(\mathbf{k}_1^{[n]} + 2\mathbf{k}_2^{[n]} + 2\mathbf{k}_3^{[n]} + \mathbf{k}_4^{[n]}). \end{aligned}$$

Q. 1 Ecrire une fonction algorithmique `REDRK4Vec` permettant de résoudre un problème de Cauchy vectoriel par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4. \square

Q. 2 Ecrire un programme algorithmique permettant de retrouver numériquement l'ordre de cette méthode. \square

EXERCICE 3

La méthode de Adam-Bashforth d'ordre 4 explicite est donnée par

$$\mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{24} \left(55\mathbf{f}^{[n]} - 59\mathbf{f}^{[n-1]} + 37\mathbf{f}^{[n-2]} - 9\mathbf{f}^{[n-3]} \right). \quad (1)$$

avec $\mathbf{f}^{[n]} = \mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]})$.

Q. 1 Ecrire la fonction algorithmique `REDAB4Vec` permettant de résoudre un problème de Cauchy vectoriel par cette méthode. \square

EXERCICE 4

On pose $\mathbf{f}^{[n]} = \mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]})$. La méthode de Adams-Bashforth d'ordre 4 explicite est donnée par

$$\mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{24} \left(55\mathbf{f}^{[n]} - 59\mathbf{f}^{[n-1]} + 37\mathbf{f}^{[n-2]} - 9\mathbf{f}^{[n-3]} \right)$$

et la méthode de Adams-Moulton d'ordre 4 implicite par

$$\mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{24} \left(9\mathbf{f}^{[n+1]} + 19\mathbf{f}^{[n]} - 5\mathbf{f}^{[n-1]} + \mathbf{f}^{[n-2]} \right)$$

avec $\mathbf{f}^{[n]} = \mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]})$.

Q. 1 Ecrire la fonction algorithmique **REDPC4Vec** permettant de résoudre un problème de Cauchy (vectoriel) par une méthode de prédiction-correction utilisant ces deux schémas. On minimisera le nombre d'appel à la fonction \mathbf{f} dans la boucle principale. \square

EXERCICE 5 : Examen du 4 avril 2023, partie E.D.O.

Q. 1 a. Que signifie l'abréviation E.D.O. ?

b. Donner la définition détaillée d'un problème de Cauchy **vectoriel**.

c. Quelles sont les données d'un problème de Cauchy **vectoriel** ?

d. Que cherche-t'on ? \square

Q. 2 Ecrire une fonction algorithmique **DisReg** permettant de d'obtenir une discrétisation régulière de l'intervalle $[a, b]$ ($a < b$) en $n + 1$ points. \square

On souhaite résoudre numériquement un problème de Cauchy par un schéma explicite à un pas (constant) du type

$$\mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + h\Phi(t^n, \mathbf{y}^{[n]}, h) \quad (2)$$

La fonction Φ associée à une méthode de Runge-Kutta à q évaluations de \mathbf{f} (fonction associée au problème de Cauchy) peut s'écrire sous la forme :

$$\Phi(t, \mathbf{y}, h) = \sum_{i=1}^q c_i \mathbf{k}^{[i]}(t, \mathbf{y}, h)$$

avec

$$\mathbf{k}^{[i]}(t, \mathbf{y}, h) = \mathbf{f} \left(t + ha_i, \mathbf{y} + h \sum_{j=1}^q b_{i,j} \mathbf{k}^{[j]}(t, \mathbf{y}, h) \right), \quad 1 \leq i \leq q$$

que l'on peut représenter sous la forme d'un tableau dit **tableau de Butcher** :

$$\begin{array}{c|c} \mathbf{a} & \mathbb{B} \\ \hline & \mathbf{c}^t \end{array} \quad (3)$$

avec $\mathbb{B} = (b_{i,j})_{i,j \in \llbracket 1, q \rrbracket} \in \mathcal{M}_{q,q}(\mathbb{R})$, $\mathbf{a} = (a_i)_{i \in \llbracket 1, q \rrbracket} \in \mathbb{R}^q$ et $\mathbf{c} = (c_i)_{i \in \llbracket 1, q \rrbracket} \in \mathbb{R}^q$.

On prend pour tableau de Butcher:

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{13}{7} & \frac{20}{7} & 0 \\ \hline & -\frac{1}{3} & \frac{25}{24} & \frac{7}{24} \end{array} \quad (4)$$

Q. 3 Ecrire explicitement et en détail le schéma de Runge-Kutta associé au tableau de Butcher (4). On admettra que ce schéma est d'ordre 3. \square

Un autre schéma de Runge-Kutta d'ordre 3 pour la résolution d'un problème de Cauchy vectoriel est donné par

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + \frac{1}{36} h(3\mathbf{k}_1 + 25\mathbf{k}_2 + 8\mathbf{k}_3) \\ \text{avec} \quad \mathbf{k}_1 = \mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]}), \\ \quad \quad \mathbf{k}_2 = \mathbf{f}(t^n + \frac{2}{5}h, \mathbf{y}^{[n]} + \frac{2}{5}h\mathbf{k}_1), \\ \quad \quad \mathbf{k}_3 = \mathbf{f}(t^n + h, \mathbf{y}^{[n]} + h(-\frac{7}{8}\mathbf{k}_1 + \frac{15}{8}\mathbf{k}_2)), \\ \mathbf{y}^{[0]} \quad \text{donné.} \end{array} \right. \quad (5)$$

Q. 4 [Algorithmique] Ecrire la fonction algorithmique `RedRK3` permettant de résoudre un problème de Cauchy vectoriel par le schéma (5). □

Un schéma explicite, à **pas multiples**, et d'ordre 3 est donné par

$$\mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + h \left(\frac{23}{12} \mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]}) - \frac{4}{3} \mathbf{f}(t^{n-1}, \mathbf{y}^{[n-1]}) + \frac{5}{12} \mathbf{f}(t^{n-2}, \mathbf{y}^{[n-2]}) \right) \quad (6)$$

Q. 5 Expliquez en détail comment résoudre un problème de Cauchy vectoriel par le schéma (6). Un soin particulier sera apporté à l'«initialisation». □

Q. 6 [Algorithmique] Ecrire la fonction algorithmique `RedPM3` permettant de résoudre un problème de Cauchy (vectoriel) par le schéma (6). □

Application: Soit le système d'E.D.O. suivant

$$\begin{cases} \ddot{x}_1(t) - \nu_1(\dot{x}_2(t) - \dot{x}_1(t)) + x_2(t) = \cos(t) & (7a) \\ \ddot{x}_2(t) - \nu_2(\dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t)) + x_1(t) = \sin(t) & (7b) \end{cases}$$

On veut résoudre numériquement ce système d'E.D.O. avec pour données initiales $x_1(0) = 1$, $\dot{x}_1(0) = 0$, $x_2(0) = -1$, $\dot{x}_2(0) = 1/2$. Le temps final T sera égal à 10.

Q. 7 Ecrire le problème précédent sous la forme d'un problème de Cauchy. □

Q. 8 [Algorithmique] Ecrire un algorithme complet permettant de résoudre (7a)-(7b) avec les données initiales spécifiées. On prendra $\nu_1 = 1/4$ et $\nu_2 = 1/3$. Ce programme devra aussi représenter les approximations des fonctions x_1 et x_2 . On utilisera pour cela la fonction `Plot(X, Y)` qui relie les points $(X(i), Y(i))$ contenus dans les deux tableaux de même taille X et Y (fonction similaire à la fonction `plot` de Matlab). □