Méthodes Numériques II
Chapitre 4: Equations aux Dérivées Partielles
Exercices - épisode 1

Exercice 1 : schéma étudié en cours

Q. 1 *Ecrire la fonction* AssembleMat1D *retournant la matrice* $\mathbb{M} \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ *définie par*

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \beta & \alpha_1 & \beta & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \beta & \alpha_{d-2} & \beta \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

où $\alpha_1, \dots, \alpha_{d-2}$, β *et* γ *sont des réels donnés.* □

On souhaite résoudre par un schéma aux différences finies l'EDP suivante:

$$\begin{aligned} -u'' + cu &= f \quad \text{in }]a, b[, \\ u(a) &= \alpha \in \mathbb{R}, \\ u(b) &= \beta \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

où $c : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ et $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$.
On note $(x_i)_{i=0}^N$ la discrétisation régulière de $[a, b]$ avec N pas de discrétisation. Le schéma d'ordre 2 suivant

$$u_0 = \alpha, \tag{1.2}$$

$$-\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + c(x_i)u_i = f(x_i) \quad \forall i \in]\!]0, N[\![, \tag{1.3}$$

$$u_N = \beta. \tag{1.4}$$

vérifie

$$\max_{i \in [\![0,N]\!]} |u(x_i) - u_i| = \mathcal{O}(h^2). \tag{1.5}$$

On note $\boldsymbol{V}$ le vecteur de dimension $N + 1$, de composantes $\boldsymbol{V}_i = u_{i-1}$, $\forall i \in [\![1, N + 1]\!]$.

Q. 2 *Montrer que* (1.2)-(1.4) *est équivalent à resoudre un système linéaire*

$$\mathbb{A}\boldsymbol{V} = \boldsymbol{F} \tag{1.6}$$

ou l'on explicitera la matrice $\mathbb{A}$ *et le vecteur* $\boldsymbol{F}$ *en précisant les dimensions.* □

Q. 3 *a. Ecrire une fonction algorithmique* solvePDE *permettant de résoudre l'EDP précédente par le schéma* (1.2)-(1.4)*. On pourra utiliser la fonction* $\boldsymbol{X} \leftarrow \text{Solve}(\mathbb{A}, \boldsymbol{B})$ *retournant la solution du système linéaire* $\mathbb{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$*.*

b. En choisissant jeu de données pertinant et non trivial avec solution exacte, écrire un programme algorithmique permettant d'obtenir la solution numérique donnée par le schéma (1.2)-(1.4) *et de calculer* $E = \max_{i \in [\![0,N]\!]} |u(x_i) - u_i|$*.*

□

Q. 4 *En choisissant judicieusement un jeu de données écrire un programme permettant de vérifier l'ordre du schéma utilisé à l'aide de la formule* (**??**)*.* □

Exercice 2 : énoncé du cours

Soit φ une fonction suffisament régulière et $h > 0$

Q. 1 *Montrer que*

$$\frac{d\varphi}{dx}(x) = \frac{-3\varphi(x) + 4\varphi(x+h) - \varphi(x+2h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \tag{2.7}$$

□

Q. 2 *Montrer que*

$$\frac{d\varphi}{dx}(x) = \frac{3\varphi(x) - 4\varphi(x-h) + \varphi(x-2h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \tag{2.8}$$

□

Q. 3 *Déterminer une formule permettant de calculer une approximation à l'ordre* 2 *de* $\frac{d^2\varphi}{dx^2}(x)$ *en utilisant uniquement des valeurs de la fonction* φ *aux points* $x + ih$ *avec* $i \in \mathbb{N}$*.*

□

Q. 4 *Déterminer une formule permettant de calculer une approximation à l'ordre* 2 *de* $\frac{d^2\varphi}{dx^2}(x)$ *en utilisant uniquement des valeurs de la fonction* φ *aux points* $x - ih$ *avec* $i \in \mathbb{N}$*.*

□

Exercice 3 : énoncé du cours

Soit le problème suivant

$$-u''(x) + c(x)u(x) = f(x), \ \forall x \in]a; b[, \tag{3.9}$$
$$u'(a) = \alpha, \tag{3.10}$$
$$u(b) = \beta. \tag{3.11}$$

où c est une fonction positive.

Q. 1 a. *Quelles sont les données du problème* (3.9)-(3.11)*? (préciser le type de chaque donnée : réel, entier, fonction, vecteur, ...)*

b. *Quelles sont les inconnues du problème* (3.9)-(3.11)*? (préciser le type)*

c. *Quelles sont les conditions initiales?*

d. *Quelles sont les conditions aux limites?*

□

Q. 2 *Construire une discrétisation régulière de* $[a; b]$ *avec* N *pas de discrétisation en espace.* □

On note x_i, $i \in [\![0, N]\!]$ cette discrétisation. On souhaite résoudre (3.9) à l'aide du schéma numérique

$$-\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2} + c_i u_i = f_i. \tag{3.12}$$

Q. 3 a. *Expliquer comment le schéma* (3.12) *a été obtenu à partir de* (3.9) *et préciser ce que représente les termes* u_i, f_i, c_i *et* Δx*?*

b. *Donner l'ensemble* $\mathcal{E}$ *des valeurs que peut prendre* i *dans le schéma* (3.9).

c. *Construire une discrétisation des conditions aux limites d'ordre 2 au moins.*

d. *Le schéma global est de quel ordre? Justifiez.*

□

On note $\boldsymbol{V}$ le vecteur de dimension $N + 1$, de composantes $\boldsymbol{V}_i = u_{i-1}$, $\forall i \in [\![1, N + 1]\!]$.

Q. 4 *Montrer que le vecteur* $\boldsymbol{V}$ *est solution du système linéaire*

$$\mathbb{A}\boldsymbol{V} = \boldsymbol{F} \tag{3.13}$$

en explicitant la matrice $\mathbb{A}$ *et le vecteur* $\boldsymbol{F}$ *(préciser les dimensions).* □

Q. 5 *Ecrire un algorithme complet de résolution du problème* (3.9) *à* (3.11) *basé sur* (3.13)*. (Utiliser au maximum les fonctions). On pourra utiliser la fonction* $\boldsymbol{X} \leftarrow \text{Solve}(\mathbb{A}, \boldsymbol{B})$ *retournant la solution du système linéaire* $\mathbb{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$. □

EXERCICE 4 : exercice 2, partiel 2, 2019/2020

Soit l'E.D.P. suivante

$$\begin{aligned} -u''(x) + cu'(x) &= f(x), \ \forall x \in]a; b[, && (4.14)\\ -u'(a) + 3u(a) &= \alpha, && (4.15)\\ u(b) &= \beta. && (4.16) \end{aligned}$$

où c est un réel strictement positif.

Q. 1 a. *Que signifie l'abréviation E.D.P.?*

b. *Quelles sont les données du problème* (4.14)-(4.16)*? (préciser le type de chaque donnée : réel, entier, fonction, vecteur, ...)*

c. *Quelles sont les inconnues du problème* (4.14)-(4.16)*? (préciser le type)*

d. *Quelles sont les conditions initiales?*

e. *Quelles sont les conditions aux limites?*

□

Q. 2 a. *Expliciter la discrétisation régulière de* $[a; b]$ *avec* N *pas de discrétisation en espace.*

b. *Ecrire la fonction* DisReg *permettant de retourner cette discrétisation.*

□

On note x_i, $i \in [\![0, N]\!]$ cette discrétisation. On souhaite résoudre l'E.D.P. (4.14)-(4.16) à l'aide des schémas numériques

$$\begin{aligned} -\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + c\frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} &= f_i, & (4.17)\\ (3 + 6h)u_0 - 4u_1 + u_2 &= 2h\alpha. & (4.18) \end{aligned}$$

Q. 3 a. *Expliquer en détail la façon d'obtenir le schéma* (4.17) *à partir de* (4.14) *et préciser ce que représentent les termes* u_i, f_i, c *et* h*?*

b. *Expliquer en détail comment le schéma* (4.18) *a été obtenu à partir de* (4.15).

c. *Donner une discrétisation détaillée du problème* (4.14) *à* (4.16) *en utilisant les schémas* (4.17) *et* (4.18).

d. *Le schéma global est de quel ordre? Justifiez.*

□

On note $\boldsymbol{V}$ le vecteur de dimension $N + 1$, de composantes $\boldsymbol{V}_i = u_{i-1}$, $\forall i \in [\![1, N + 1]\!]$.

Q. 4 *Montrer que le vecteur* $\boldsymbol{V}$ *est solution du système linéaire*

$$\mathbb{A}\boldsymbol{V} = \boldsymbol{F} \tag{4.19}$$

en explicitant la matrice $\mathbb{A}$ *et le vecteur* $\boldsymbol{F}$ *(préciser les dimensions).* □

Q. 5 *Ecrire la fonction* Assemble *retournant la matrice* $\mathbb{M} \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ *définie par*

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ r & s & w & 0 & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & r & s & w \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \nu_3 & \nu_2 & \nu_1 \end{pmatrix} \tag{4.20}$$

où s, r, w, μ_1, μ_2, μ_3, ν_1, ν_2 *et* ν_3 *sont des réels donnés.* □

Q. 6 *Ecrire un algorithme complet de résolution du problème* (4.14) *à* (4.16) *basé sur* (4.19). *(Utiliser au maximum les fonctions). On pourra utiliser la fonction* $\boldsymbol{X} \leftarrow \mathrm{Solve}(\mathbb{A}, \boldsymbol{B})$ *retournant la solution du système linéaire* $\mathbb{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$. □