

Méthodes Numériques II

Chapitre 4: Equations aux Dérivées Partielles

Exercices - épisode 2

EXERCICE 1 : exercice 2, partiel 2, 2017/2018

Soient α, β, D trois réels, $D > 0$, et f une fonction définie sur $[a; b]$ à valeurs réelles. On souhaite résoudre numériquement le problème suivant

$$-Du''(x) + u(x) = f(x), \quad \forall x \in]a; b[, \quad (1.1)$$

$$u(a) = \alpha. \quad (1.2)$$

$$3u(b) + u'(b) = \beta, \quad (1.3)$$

- Q. 1**
- Quelles sont les données du problème (1.1) à (1.3)? (préciser le type de chaque donnée : réel, entier, fonction, vecteur, ...)
 - Quelles sont les inconnues du problème (1.1) à (1.3)? (préciser le type)
 - Quelles sont les conditions initiales?
 - Quelles sont les conditions aux limites?

□

- Q. 2**
- Expliquer ce qu'est une discrétisation régulière de l'intervalle $[a; b]$ avec N pas de discrétisation en espace.
 - Ecrire la fonction (algorithmique ou Matlab) DISREG permettant d'obtenir cette discrétisation.

□

On note $x_i, i \in \llbracket 0, N \rrbracket$ cette discrétisation. On souhaite résoudre (1.1) à l'aide du schéma numérique

$$-D \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2} + u_i = f_i. \quad (1.4)$$

- Q. 3**
- Expliquer comment le schéma (1.4) a été obtenu à partir de (1.1) et préciser ce que représentent les termes u_i, f_i et Δx ?
 - Donner l'ensemble \mathcal{E} des valeurs que peut prendre i dans le schéma (1.4).
 - Construire une discrétisation des conditions aux limites d'ordre 2 au moins.
 - Le schéma global est de quel ordre? Justifiez.

□

On note \mathbf{V} le vecteur de dimension $N + 1$, de composantes $\mathbf{V}_i = u_{i-1}, \forall i \in \llbracket 1, N + 1 \rrbracket$.

Q. 4 Montrer que le vecteur \mathbf{V} est solution du système linéaire

$$\mathbb{A}\mathbf{V} = \mathbf{F} \quad (1.5)$$

en explicitant la matrice \mathbb{A} et le vecteur \mathbf{F} (préciser les dimensions). \square

Q. 5 Ecrire la fonction (algorithmique ou Matlab) ASSEMBLEMAT retournant une matrice $\mathbb{M} \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ définie par

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

où pour tout $j \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$, α_j , β_j , μ_j sont des réels donnés. \square

Q. 6 On suppose les données du problème (1.1) à (1.3) fournies et la fonction RSL permettant la résolution du système linéaire $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ déjà implémentée : $\mathbf{x} \leftarrow \text{RSL}(\mathbb{A}, \mathbf{b})$. Ecrire un algorithme complet de résolution du problème (1.1) à (1.3) basé sur (1.5). (Utiliser au maximum les fonctions) \square

EXERCICE 2

Soit $\begin{cases} u : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, x) \longmapsto u(t, x) \end{cases}$ une fonction suffisamment régulière. Voici deux exemples de formules de Taylor à l'ordre 3

$$\begin{aligned} u(t, x+h) &= u(t, x) + h \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) + \mathcal{O}(h^3) \\ u(t+h, x) &= u(t, x) + h \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) + \mathcal{O}(h^3) \end{aligned}$$

Q. 1 En écrivant des formules de Taylor à l'ordre 2, montrer que

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) &= \frac{u(t, x+h) - u(t, x)}{h} + \mathcal{O}(h) \\ \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) &= \frac{u(t, x) - u(t, x-h)}{h} + \mathcal{O}(h) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) &= \frac{u(t+h, x) - u(t, x)}{h} + \mathcal{O}(h) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) &= \frac{u(t, x) - u(t-h, x)}{h} + \mathcal{O}(h) \end{aligned}$$

\square

Q. 2 En utilisant deux formules de Taylor à l'ordre 3, montrer que

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, x) = \frac{u(t, x+h) - u(t, x-h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2)$$

□

Q. 3 En utilisant des formules de Taylor à l'ordre 3, montrer que

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) &= \frac{-3u(t, x) + 4u(t, x+h) - u(t, x+2h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \\ \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) &= \frac{3u(t, x) - 4u(t, x-h) + u(t, x-2h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \end{aligned}$$

□

Q. 4 En utilisant deux formules de Taylor à l'ordre 4, montrer que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = \frac{u(t, x+h) - 2u(t, x) + u(t, x-h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2) \quad (2.7)$$

□

EXERCICE 3 : exercice 2, partiel 2, 2016/2017

On souhaite résoudre numériquement l'E.D.P. suivante

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) - \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) + \beta \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) = f(t, x), \quad \forall (t, x) \in]0; T] \times]a; b[, \quad (3.8)$$

$$u(0, x) = g_0(x), \quad \forall x \in [a; b], \quad (3.9)$$

$$u(t, a) = g_a(t), \quad \forall t \in [0; T], \quad (3.10)$$

$$u(t, b) = g_b(t), \quad \forall t \in [0; T]. \quad (3.11)$$

avec α, β deux réels, $\alpha > 0, T > 0, (a, b) \in \mathbb{R}^2, a < b$.

Q. 1 a. Que signifie l'abréviation E.D.P.?

b. Quelles sont les données du problème (3.8) à (3.11)? (préciser le type de chaque donnée : réel, entier, fonction, vecteur, ...)

c. Quelles sont les inconnues du problème (3.8) à (3.11)? (préciser le type)

d. Quelles sont les conditions initiales?

e. Quelles sont les conditions aux limites?

f. Ecrire la(les) condition(s) de compatibilité.

□

On note $t^n, n \in \llbracket 0, N_t \rrbracket$ et $x_i, i \in \llbracket 0, N_x \rrbracket$ les discrétisations régulières des intervalles $[0; T]$ et $[a; b]$ avec N_t pas de discrétisation en temps et N_x pas de discrétisation en espace.

Q. 2 Donner explicitement les formules permettant de calculer l'ensemble des t^n et des x_i . □

On souhaite résoudre l'E.D.P. à l'aide du schéma numérique

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} - \alpha \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} + \beta \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x} = f_i^n. \quad (3.12)$$

Q. 3 a. Expliquer comment le schéma (3.12) a été obtenu à partir de (3.8) et préciser ce que représentent les valeurs u_i^n , f_i^n , Δt et Δx .

b. Donner une discrétisation (détaillée) du problème (3.8) à (3.11) en utilisant le schéma (3.12).

c. Le schéma est-il explicite ou implicite?

d. Le schéma est de quel ordre en temps? en espace?

e. Expliquer comment améliorer l'ordre en espace du schéma (3.12). □

On note \mathbf{U}^n les vecteurs de dimension $N_x + 1$, de composantes $\mathbf{U}_i^n = u_{i-1}^n, \forall i \in \llbracket 1, N_x + 1 \rrbracket$.

Q. 4 a. Comment initialiser le vecteur \mathbf{U}^0 ?

b. En supposant le vecteur \mathbf{U}^n déjà calculé, décrire le calcul du vecteur \mathbf{U}^{n+1} . □

Q. 5 On suppose les données du problème (3.8) à (3.11) fournies. Ecrire un algorithme complet de résolution du problème (3.8) à (3.11) en utilisant le schéma (3.12). □