Méthodes Numériques II
Exercices - révision

Exercice 1 : Examen du 4 avril 2023, partie E.D.O.

Q. 1 a. *Que signifie l'abréviation E.D.O.?*

b. *Donner la définition détaillée d'un problème de Cauchy* ***vectoriel****.*

c. *Quelles sont les données d'un problème de Cauchy* ***vectoriel****?*

d. *Que cherche-t'on?*

□

R. 1 a. Equation Différentielle Ordinaire

b. Un problème de Cauchy vectoriel consiste à déterminer la fonction $\boldsymbol{y} : [t^0, t^0 + T] \longrightarrow \mathbb{R}^m$ solution de

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}'(t) &= \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y}(t)), \quad \forall t \in [t^0, t^0 + T], \\ \boldsymbol{y}(t^0) &= \boldsymbol{y}_0 \in \mathbb{R}^m, \end{cases}$$

avec $\boldsymbol{f} : [t^0, t^0 + T] \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ donné.

c. les données d'un problème de Cauchy vectoriel sont

- $t^0 \in \mathbb{R}$,
- $T \in \mathbb{R}^{+*}$,
- $\boldsymbol{y}_0 \in \mathbb{R}^m$,
- $\boldsymbol{f} : [t^0, t^0 + T] \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$.

d. On cherche la fonction $\boldsymbol{y} : [t^0, t^0 + T] \longrightarrow \mathbb{R}^m$

Q. 2 *Ecrire une fonction algorithmique* `DisReg` *permettant de d'obtenir une discrétisation régulière de l'intervalle $[a, b]$ $(a < b)$ en $n + 1$ points.* □

R. 2 Une discrétisation régulière de l'intervalle $[a, b]$ avec N pas (constant) de discrétisation est donnée par

$$t^n = a + nh, \ \forall n \in [\![0, N]\!], \quad \text{avec } h = \frac{b-a}{N}.$$

Algorithme 1 Fonction DisReg retournant une discrétisation régulière de l'intervalle $[a, b]$

Données : a, b : deux réels, $a < b$
N : un entier non nul (nombre de pas de discrétisation).
Résultat : $\boldsymbol{t}$: vecteur de $\mathbb{R}^{N+1}$

```
Fonction t ← DisReg( a, b, N )
  h ← (b − a)/N
  Pour n ← 0 à N faire
    t(n + 1) ← a + n ∗ h
  Fin Pour
Fin Fonction
```

On souhaite résoudre numériquement un problème de Cauchy par un schéma explicite à un pas (constant) du type

$$\boldsymbol{y}^{[n+1]} = \boldsymbol{y}^{[n]} + h\boldsymbol{\Phi}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]}, h) \tag{1.1}$$

La fonction $\boldsymbol{\Phi}$ associée à une méthode de Runge-Kutta à q évaluations de $\boldsymbol{f}$ (fonction associée au problème de Cauchy) peut s'écrire sous la forme :

$$\boldsymbol{\Phi}(t, \boldsymbol{y}, h) = \sum_{i=1}^{q} c_i \boldsymbol{k}^{[i]}(t, \boldsymbol{y}, h)$$

avec

$$\boldsymbol{k}^{[i]}(t, \boldsymbol{y}, h) = \boldsymbol{f}\left(t + ha_i, y + h \sum_{j=1}^{q} b_{i,j} \boldsymbol{k}^{[j]}(t, \boldsymbol{y}, h) \right), \ 1 \leqslant i \leqslant q$$

que l'on peut représenter sous la forme d'un tableau dit **tableau de Butcher** :

$$\begin{array}{c|c} \boldsymbol{a} & \mathbb{B} \\ \hline & \boldsymbol{c}^t \end{array} \tag{1.2}$$

avec $\mathbb{B} = (b_{i,j})_{i,j \in [\![1,q]\!]} \in \mathcal{M}_{q,q}(\mathbb{R})$, $\boldsymbol{a} = (a_i)_{i \in [\![1,q]\!]} \in \mathbb{R}^q$ et $\boldsymbol{c} = (c_i)_{i \in [\![1,q]\!]} \in \mathbb{R}^q$.
On prend pour tableau de Butcher:

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{13}{7} & \frac{20}{7} & 0 \\ \hline & -\frac{1}{3} & \frac{25}{24} & \frac{7}{24} \end{array} \tag{1.3}$$

Q. 3 *Ecrire explicitement et en détail le schéma de Runge-Kutta associé au tableau de Butcher (1.3). On admettra que ce schéma est d'ordre* 3. □

R. 3 On a, par identification, $q=3$ ainsi que

$$\boldsymbol{a}=\left(0,\,\frac{1}{5},\,1\right),\ \boldsymbol{c}=\left(-\frac{1}{3},\,\frac{25}{24},\,\frac{7}{24}\right)\ \text{et}\ \mathbb{B}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ \frac{1}{5} & 0 & 0\\ -\frac{13}{7} & \frac{20}{7} & 0\end{pmatrix}.$$

On obtient alors

$$\boldsymbol{y}^{[n+1]}=\boldsymbol{y}^{[n]}+h\boldsymbol{\Phi}(t^n,\boldsymbol{y}^{[n]},h)$$

avec

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Phi}(t,\boldsymbol{y},h) &= \sum_{i=1}^{q} c_i\boldsymbol{k}^{[i]}(t,\boldsymbol{y},h)\\ &= c_1\boldsymbol{k}^{[1]}(t,\boldsymbol{y},h)+c_2\boldsymbol{k}^{[2]}(t,\boldsymbol{y},h)+c_3\boldsymbol{k}^{[3]}(t,\boldsymbol{y},h)\\ &= -\frac{1}{3}\boldsymbol{k}^{[1]}(t,\boldsymbol{y},h)+\frac{25}{24}\boldsymbol{k}^{[2]}(t,\boldsymbol{y},h)+\frac{7}{24}\boldsymbol{k}^{[3]}(t,\boldsymbol{y},h)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\boldsymbol{k}^{[1]}(t,\boldsymbol{y},h) &= \boldsymbol{f}\left(t+ha_1, y+h\sum_{j=1}^{q} b_{1,j}\boldsymbol{k}^{[j]}(t,\boldsymbol{y},h)\right)\\ &= \boldsymbol{f}\left(t^n, y+h\big(b_{1,1}\boldsymbol{k}^{[1]}(t,\boldsymbol{y},h)+b_{1,2}\boldsymbol{k}^{[2]}(t,\boldsymbol{y},h)+b_{1,3}\boldsymbol{k}^{[3]}(t,\boldsymbol{y},h)\big)\right)\\ &= \boldsymbol{f}\left(t^n,y\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{k}^{[2]}(t,\boldsymbol{y},h) &= \boldsymbol{f}\left(t+ha_2, y+h\sum_{j=1}^{q} b_{2,j}\boldsymbol{k}^{[j]}(t,\boldsymbol{y},h)\right)\\ &= \boldsymbol{f}\left(\frac{1}{5}h+t^n, y+h\big(b_{2,1}\boldsymbol{k}^{[1]}(t,\boldsymbol{y},h)+b_{2,2}\boldsymbol{k}^{[2]}(t,\boldsymbol{y},h)+b_{2,3}\boldsymbol{k}^{[3]}(t,\boldsymbol{y},h)\big)\right)\\ &= \boldsymbol{f}\left(\frac{1}{5}h+t^n, y+\frac{1}{5}h\boldsymbol{k}^{[1]}(t,\boldsymbol{y},h)\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{k}^{[3]}(t,\boldsymbol{y},h) &= \boldsymbol{f}\left(t+ha_3, y+h\sum_{j=1}^{q} b_{3,j}\boldsymbol{k}^{[j]}(t,\boldsymbol{y},h)\right)\\ &= \boldsymbol{f}\left(h+t^n, y+h\big(b_{3,1}\boldsymbol{k}^{[1]}(t,\boldsymbol{y},h)+b_{3,2}\boldsymbol{k}^{[2]}(t,\boldsymbol{y},h)+b_{3,3}\boldsymbol{k}^{[3]}(t,\boldsymbol{y},h)\big)\right)\\ &= \boldsymbol{f}\left(h+t^n, y+-\frac{13}{7}h\boldsymbol{k}^{[1]}(t,\boldsymbol{y},h)+\frac{20}{7}h\boldsymbol{k}^{[2]}(t,\boldsymbol{y},h)\right).\end{aligned}$$

En résumé, le schéma peut s'écrire :

$$\left\{\begin{array}{lll}\boldsymbol{y}^{[n+1]} & = & \boldsymbol{y}^{[n]}+-\frac{1}{24}\,h(8\,\boldsymbol{k}_1-25\,\boldsymbol{k}_2-7\,\boldsymbol{k}_3)\\ \text{avec} & & \boldsymbol{k}_1=\boldsymbol{f}(t^n,\boldsymbol{y}^{[n]}),\\ & & \boldsymbol{k}_2=\boldsymbol{f}(t^n+\frac{1}{5}\,h,\boldsymbol{y}^{[n]}+\frac{1}{5}\,h\boldsymbol{k}_1),\\ & & \boldsymbol{k}_3=\boldsymbol{f}(t^n+h,\boldsymbol{y}^{[n]}+h(-\frac{13}{7}\,\boldsymbol{k}_1+\frac{20}{7}\,\boldsymbol{k}_2)),\\ \boldsymbol{y}^{[0]} & & \text{donné.}\end{array}\right.$$

Un autre schéma de Runge-Kutta d'ordre 3 pour la résolution d'un problème de Cauchy vectoriel est donné par

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}^{[n+1]} & = & \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{1}{36}\,h(3\,\boldsymbol{k}_1 + 25\,\boldsymbol{k}_2 + 8\,\boldsymbol{k}_3) \\ \text{avec} & & \boldsymbol{k}_1 = \boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]}), \\ & & \boldsymbol{k}_2 = \boldsymbol{f}(t^n + \frac{2}{5}\,h, \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{2}{5}\,h\boldsymbol{k}_1), \\ & & \boldsymbol{k}_3 = \boldsymbol{f}(t^n + h, \boldsymbol{y}^{[n]} + h(-\frac{7}{8}\,\boldsymbol{k}_1 + \frac{15}{8}\,\boldsymbol{k}_2)), \\ \boldsymbol{y}^{[0]} & & \text{donné.} \end{cases} \tag{1.4}$$

Q. 4 *[Algorithmique] Ecrire la fonction algorithmique* RedRK3 *permettant de résoudre un problème de Cauchy vectoriel par le schéma* (1.4). □

R. 4 L'algorithme de la fonction REDRK3Vec s'écrit alors :

Algorithme 2 Fonction REDRK3Vec : résolution d'un problème de Cauchy par le schéma de RK3

Données :
- $\boldsymbol{f}$: $\boldsymbol{f} : [t^0, t^0 + T] \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ fonction d'un problème de Cauchy (scalaire)
- t^0 : réel, temps initial
- T : réel > 0
- $\boldsymbol{y}^0$: un vecteur de $\mathbb{R}^m$, donnée initiale
- N : un entier non nul (nombre de pas de discrétisation).

Résultat :
- $\boldsymbol{t}$: vecteur de $\mathbb{R}^{N+1}$, $\boldsymbol{t}(n) = t^{n-1}$, $\forall n \in [\![1, N+1]\!]$
- $\mathbb{Y}$: matrice réelle de dimension $m \times (N+1)$, $\mathbb{Y}(:, n) = \boldsymbol{y}^{(n-1)}$, $\forall n \in [\![1, N+1]\!]$

Fonction $[\boldsymbol{t}, \mathbb{Y}] \leftarrow$ REDRK3Vec($f, t^0, T, \boldsymbol{y}^0, N$)
  $\boldsymbol{t} \leftarrow \text{DisReg}(t^0, t^0 + T, N)$
  $h \leftarrow (b - a)/N$
  $\mathbb{Y}(:, 1) \leftarrow \boldsymbol{y}^0$
  Pour $n \leftarrow 1$ **à** N **faire**
    $\boldsymbol{k}_1 \leftarrow \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{t}(n)\ ,\ \mathbb{Y}(:, n)\big)$
    $\boldsymbol{k}_2 \leftarrow \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{t}(n) + 2 * h/5\ ,\ \mathbb{Y}(:, n) + (2 * h/5) * \boldsymbol{k}_1\big)$
    $\boldsymbol{k}_3 \leftarrow \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{t}(n+1)\ ,\ \mathbb{Y}(:, n) + h * (-7/8 * \boldsymbol{k}_1 + 15/8 * \boldsymbol{k}_2)\big)$ $\triangleright$ $\boldsymbol{t}(n) + h = \boldsymbol{t}(n+1)$
    $\mathbb{Y}(:, n+1) \leftarrow \mathbb{Y}(:, n) + (h/36) * (3 * \boldsymbol{k}_1 + 25 * \boldsymbol{k}_2 + 8 * \boldsymbol{k}_3)$
  Fin Pour
Fin Fonction

Un schéma explicite, à **pas multiples**, et d'ordre 3 est donné par

$$\boldsymbol{y}^{[n+1]} = \boldsymbol{y}^{[n]} + h\left(\frac{23}{12}\boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]}) - \frac{4}{3}\boldsymbol{f}(t^{n-1}, \boldsymbol{y}^{[n-1]}) + \frac{5}{12}\boldsymbol{f}(t^{n-2}, \boldsymbol{y}^{[n-2]})\right) \tag{1.5}$$

Q. 5 *Expliquez en détail comment résoudre un problème de Cauchy vectoriel par le schéma* (1.5). *Un soin particulier sera apporté à l'«initialisation».* □

R. 5 Dans ce schéma, $(t^n)_{n=0}^N$ est la discrétisation régulière de $[t^0, t^0+T]$ avec N pas de discrétisation, $h = T/N$.
Le schéma (1.5) est à 3 pas, il est donc nécessaire de connaitre $\boldsymbol{y}^{[0]}$, $\boldsymbol{y}^{[1]}$ et $\boldsymbol{y}^{[2]}$ pour ensuite utiliser (1.5) en prenant successivement $n = 2, 3, \ldots, N-1$ ce qui permet alors de déterminer successivement $\boldsymbol{y}^{[3]}, \boldsymbol{y}^{[4]}, \ldots, \boldsymbol{y}^{[N]}$.
La donnée initiale $\boldsymbol{y}^{[0]}$ étant connu, il nous faut calculer $\boldsymbol{y}^{[1]}$ et $\boldsymbol{y}^{[2]}$. Pour celà on utilise un schéma à un pas, au moins du même ordre (3 ici). On peut donc utiliser la fonction REDRK3Vec pour calculer ces trois premiers termes en faisant attention à bien calculer ceux-ci aux temps t^0, $t^1 = t^0 + h$, et $t^2 = t^0 + 2h$. On utilise donc la fonction REDRK3Vec de la manière suivante:

$$[\boldsymbol{t}_{ini}, \mathbb{Y}_{ini}] \leftarrow \text{REDRK3Vec}(f, t^0, t^0 + 2*h, \boldsymbol{y}_0, 2).$$

On a alors $\boldsymbol{t}_{ini} \in \mathbb{R}^3$, $\mathbb{Y}_{ini} \in \mathcal{M}_{m,3}(\mathbb{R})$ avec

$$\boldsymbol{t}_{ini}(1) = t^0,\ \boldsymbol{t}_{ini}(2) = t^0 + h \text{ et } \boldsymbol{t}_{ini}(3) = t^0 + 2*h$$

et

$$\mathbb{Y}_{ini}(:,1) \approx \boldsymbol{y}(t^0),\ \mathbb{Y}_{ini}(:,2) \approx \boldsymbol{y}(t^0+h) \text{ et } \mathbb{Y}_{ini}(:,3) \approx \boldsymbol{y}(t^0+2h).$$

Q. 6 *[Algorithmique] Ecrire la fonction algorithmique* RedPM3 *permettant de résoudre un problème de Cauchy (vectoriel) par le schéma* (1.5).

□

R. 6 Voici un algorithme possible:

Algorithme 3 Fonction REDPM3Vec : résolution d'un problème de Cauchy par le schéma explicite à pas multiples d'ordre 3

Données : $\boldsymbol{f}$: $\boldsymbol{f} : [t^0, t^0 + T] \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ fonction d'un problème de Cauchy (scalaire)
t^0 : réel, temps initial
T : réel > 0
$\boldsymbol{y}^0$: un vecteur de $\mathbb{R}^m$, donnée initiale
N : un entier non nul (nombre de pas de discrétisation).

Résultat : $\boldsymbol{t}$: vecteur de $\mathbb{R}^{N+1}$, $\boldsymbol{t}(n) = t^{n-1}, \ \forall n \in [\![1, N+1]\!]$
$\mathbb{Y}$: matrice réelle de dimension $m \times (N+1)$, $\mathbb{Y}(:, n) = \boldsymbol{y}^{[n-1]}, \ \forall n \in [\![1, N+1]\!]$

Fonction $[\boldsymbol{t}, \mathbb{Y}] \leftarrow$ REDPM3Vec($\boldsymbol{f}, t^0, T, \boldsymbol{y}^0, N$)
  $\boldsymbol{t} \leftarrow$ DisReg$(t^0, t^0 + T, N)$
  $h \leftarrow T/N$
  $[\boldsymbol{t}_{ini}, \mathbb{Y}_{ini}] \leftarrow$ REDRK3Vec$(\boldsymbol{f}, t^0, t^0 + 2 * h, \boldsymbol{y}^0, 2)$
  Pour $n \leftarrow 1$ **à** 3 **faire**
    $\mathbb{Y}(:, n) \leftarrow \mathbb{Y}_{ini}(:, n)$
  Fin Pour
  Pour $n \leftarrow 3$ **à** N **faire**
    $\boldsymbol{f}_0 \leftarrow \boldsymbol{f}(\boldsymbol{t}(n), \mathbb{Y}(:, n))$
    $\boldsymbol{f}_1 \leftarrow \boldsymbol{f}(\boldsymbol{t}(n-1), \mathbb{Y}(:, n-1))$
    $\boldsymbol{f}_2 \leftarrow \boldsymbol{f}(\boldsymbol{t}(n-2), \mathbb{Y}(:, n-2))$
    $\mathbb{Y}(:, n+1) \leftarrow \mathbb{Y}(:, n) + (h/12) * \left(23 * \boldsymbol{f}_0 - 16 * \boldsymbol{f}_1 + 5 * \boldsymbol{f}_2\right)$
  Fin Pour
Fin Fonction

Une autre version minimisant le nombre d'appels à la fonction $\boldsymbol{f}$ est donné par

Algorithme 4 Fonction REDPM3VecV1 : résolution d'un problème de Cauchy par le schéma explicite à pas multiples d'ordre 3 en minimisant le nombre d'appels à la fonction $\boldsymbol{f}$

Données : $\boldsymbol{f}$: $\boldsymbol{f} : [t^0, t^0+T] \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ fonction d'un problème de Cauchy (scalaire)
t^0 : réel, temps initial
T : réel > 0
$\boldsymbol{y}^0$: un vecteur de $\mathbb{R}^m$, donnée initiale
N : un entier non nul (nombre de pas de discrétisation).

Résultat : $\boldsymbol{t}$: vecteur de $\mathbb{R}^{N+1}$, $\boldsymbol{t}(n) = t^{n-1}$, $\forall n \in [\![1, N+1]\!]$
$\mathbb{Y}$: matrice réelle de dimension $m \times (N+1)$, $\mathbb{Y}(:,n) = \boldsymbol{y}^{[n-1]}$, $\forall n \in [\![1, N+1]\!]$

Fonction $[\boldsymbol{t}, \mathbb{Y}] \leftarrow$ REDPM3VecV1($\boldsymbol{f}, t^0, T, \boldsymbol{y}^0, N$)
  $\boldsymbol{t} \leftarrow$ DisReg(t^0, t^0+T, N)
  $h \leftarrow T/N$
  $[\boldsymbol{t}_{ini}, \mathbb{Y}_{ini}] \leftarrow$ REDRK3Vec$(\boldsymbol{f}, t^0, t^0 + 2*h, \boldsymbol{y}^0, 2)$
  Pour $n \leftarrow 1$ **à** 3 **faire**
    $\mathbb{Y}(:,n) \leftarrow \mathbb{Y}_{ini}(:,n)$
  Fin Pour
  $\boldsymbol{f}_1 \leftarrow \boldsymbol{f}(\boldsymbol{t}(2), \mathbb{Y}(:,2))$
  $\boldsymbol{f}_2 \leftarrow \boldsymbol{f}(\boldsymbol{t}(1), \mathbb{Y}(:,1))$
  Pour $n \leftarrow 3$ **à** N **faire**
    $\boldsymbol{f}_0 \leftarrow \boldsymbol{f}(\boldsymbol{t}(n), \mathbb{Y}(:,n))$
    $\mathbb{Y}(:,n+1) \leftarrow \mathbb{Y}(:,n) + (h/12) * \left(23 * \boldsymbol{f}_0 - 16 * \boldsymbol{f}_1 + 5 * \boldsymbol{f}_2\right)$
    $\boldsymbol{f}_2 \leftarrow \boldsymbol{f}_1$
    $\boldsymbol{f}_1 \leftarrow \boldsymbol{f}_0$
  Fin Pour
Fin Fonction

Application: Soit le système d'E.D.O. suivant

$$\begin{cases} \ddot{x}_1(t) - \nu_1(\dot{x}_2(t) - \dot{x}_1(t)) + x_2(t) &= \cos(t) \quad (1.6a)\\ \ddot{x}_2(t) - \nu_2(\dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t)) + x_1(t) &= \sin(t) \quad (1.6b)\end{cases}$$

On veut résoudre numériquement ce système d'E.D.O. avec pour données initiales $x_1(0) = 1$, $\dot{x}_1(0) = 0$, $x_2(0) = -1$, $\dot{x}_2(0) = 1/2$. Le temps final T sera égal à 10.

Q. 7 *Ecrire le problème précédent sous la forme d'un problème de Cauchy.* □

R. 7 C'est un système de deux E.D.O couplées: elles dépendent l'une de l'autre. Les deux E.D.O. oyant un terme en dérivée seconde, elles sont d'ordre 2. On va donc pouvoir *transformer* chacune des E.D.O. en deux E.D.O. d'ordre 1, pour aboutir à un système de 4 E.D.O. d'ordre 1.

On pose, par exemple,

$$\boldsymbol{y}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \\ y_4(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix}.$$

Il aurait aussi été possible de prendre

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_1'(t) \\ x_2(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \text{ ou } \ldots$$

Avec notre choix, on a

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{y}'(t) &= \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_1''(t) \\ x_2''(t) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} y_3(t) \\ y_4(t) \\ \nu_1(x_2'(t) - x_1'(t)) - x_2(t) + \cos(t) \\ \nu_2(x_1'(t) - x_2'(t)) - x_1(t) + \sin(t) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} y_3(t) \\ y_4(t) \\ \nu_1(y_4(t) - y_3(t)) - y_2(t) + \cos(t) \\ \nu_2(y_3(t) - y_4(t)) - y_1(t) + \sin(t) \end{pmatrix} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y}(t)).
\end{aligned}$$

Le problème de Cauchy associé est donc

trouver la fonction $\boldsymbol{y} : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^4$ vérifiant

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{y}'(t) &= \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y}(t)), \quad \forall t \in [0, T] \\
\boldsymbol{y}(0) &= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{f} \; : \; [0, T] \times \mathbb{R}^4 &\longrightarrow \mathbb{R}^4 \\
(t, \boldsymbol{z}) &\longmapsto \begin{pmatrix} z_3 \\ z_4 \\ \nu_1(z_4 - z_3) - z_2 + \cos(t) \\ \nu_2(z_3 - z_4) - z_1 + \sin(t) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Q. 8 *[Algorithmique] Ecrire un algorithme complet permettant de résoudre* (1.6a)-(1.6b) *avec les données initiales spécifiées. On prendra* $\nu_1 = 1/4$ *et* $\nu_2 = 1/3$. *Ce programme devra aussi représenter les approximations des fonctions* x_1 *et* x_2*. On utilisera pour celà la fonction* Plot(X, Y) *qui relie les points* $(X(i), Y(i))$ *contenus dans les deux tableaux de même taille* X *et* Y *(function similaire à la fonction* `plot` *de Matlab).* □

R. 8 Voici le programme algorithmique complet:

$T \leftarrow 10$

$\nu_1 \leftarrow 1/4,\ \nu_2 \leftarrow 1/3,$

$$\begin{array}{rccl} \boldsymbol{f} & : & [0,T]\times\mathbb{R}^4 & \longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ & & (t,\boldsymbol{z}) & \longmapsto \begin{pmatrix} z_3 \\ z_4 \\ \nu_1(z_4 - z_3) - z_2 + \cos(t) \\ \nu_2(z_3 - z_4) - z_1 + \sin(t) \end{pmatrix} \end{array}$$

$[\boldsymbol{t}, \mathbb{Y}] \leftarrow \text{REDPM3Vec}(\boldsymbol{f}, 0, T, \begin{pmatrix} 1, \\ -1 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}, 1000)$

$\text{Plot}(\boldsymbol{t}, \mathbb{Y}(1,:))$ ▷ Représentation de la fonction x_1

$\text{Plot}(\boldsymbol{t}, \mathbb{Y}(2,:))$ ▷ Représentation de la fonction x_2

Exercice 2 : exercice 2, partiel 2, 2016/2017

On souhaite résoudre numériquement l'E.D.P. suivante

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) - \alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) + \beta\frac{\partial u}{\partial x}(t,x) = f(t,x),\ \ \forall (t,x) \in]0;T]\times]a;b[, \tag{2.7}$$

$$u(0,x) = g_0(x),\ \ \forall x \in [a;b], \tag{2.8}$$

$$u(t,a) = g_a(t),\ \ \forall t \in [0;T], \tag{2.9}$$

$$u(t,b) = g_b(t),\ \ \forall t \in]0;T]. \tag{2.10}$$

avec α, β deux réels, $\alpha > 0$, $T > 0$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$.

Q. 1 a. *Que signifie l'abréviation E.D.P.?*

b. *Quelles sont les données du problème* (2.7) *à* (2.10)*? (préciser le type de chaque donnée : réel, entier, fonction, vecteur, ...)*

c. *Quelles sont les inconnues du problème* (2.7) *à* (2.10)*? (préciser le type)*

d. *Quelles sont les conditions initiales?*

e. *Quelles sont les conditions aux limites?*

f. *Ecrire la(les) condition(s) de compatibilité.*

□

R. 1 a. Equations aux Dérivées Partielles

b. Les données sont

- $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$.
- $T \in \mathbb{R}^{+*}$,
- α, β deux réels, $\alpha > 0$,
- $f : [0, T] \times [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$,
- $g_0 : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$,
- $g_a : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$,
- $g_b : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$.

c. $u : [0, T] \times [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$.

d. (2.8).

e. (2.9) et (2.10).

f. $g_a(0) = g_0(a)$ et $g_b(0) = g_0(b)$.

On note t^n, $n \in [\![0, N_t]\!]$ et x_i, $i \in [\![0, N_x]\!]$ les discrétisations régulières des intervalles $[0; T]$ et $[a; b]$ avec N_t pas de discrétisation en temps et N_x pas de discrétisation en espace.

> **Q. 2** *Donner explicitement les formules permettant de calculer l'ensemble des t^n et des x_i.* □

R. 2

$$\begin{aligned} t^n &= n\Delta t, & \forall n \in [\![0, N_t]\!] & \quad \text{avec } \Delta t = T/N_t, \\ x_i &= a + i\Delta x, & \forall i \in [\![0, N_x]\!] & \quad \text{avec } \Delta x = (b-a)/N_x. \end{aligned}$$

On souhaite résoudre l'E.D.P. à l'aide du schéma numérique

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} - \alpha \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} + \beta \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x} = f_i^n. \tag{2.11}$$

> **Q. 3** a. *Expliquer comment le schéma (2.11) a été obtenu à partir de (2.7) et préciser ce que représentent les valeurs u_i^n, f_i^n, Δt et Δx.*
>
> b. *Donner une discrétisation (détaillée) du problème (2.7) à (2.10) en utilisant le schéma (2.11).*
>
> c. *Le schéma est-il explicite ou implicite?*
>
> d. *Le schéma est de quel ordre en temps? en espace?*
>
> e. *Expliquer comment améliorer l'ordre en espace du schéma (2.11).*
>
> □

R. 3 a. L'équation (2.7) entraine

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t^n, x_i) - \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t^n, x_i) + \beta \frac{\partial u}{\partial x}(t^n, x_i) = f(t^n, x_i), \ \forall (n, i) \in]\!]0, N_t]\!] \times]\!]0, N_x[\![. \quad (2.12)$$

- étude de $\frac{\partial u}{\partial t}(t^n, x_i)$ pour aboutir à $\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t}$.
  En utilisant le développement de Taylor suivant t (à x fixé), on a

$$u(t+h, x) = u(t, x) + h \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + \mathcal{O}(h^2)$$

  ce qui entraine

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \frac{u(t+h, x) - u(t, x)}{h} + \mathcal{O}(h).$$

  On peut alors utiliser cette equation en $(t, x) = (t^n, x_i)$ et $h = \Delta_t$, pour obtenir

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t^n, x_i) = \frac{u(t^{n+1}, x_i) - u(t^n, x_i)}{\Delta_t} + \mathcal{O}(\Delta_t). \quad (2.13)$$

- étude de $\frac{\partial u}{\partial x}(t^n, x_i)$ pour aboutir à $\frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x}$.
  En utilisant le développement de Taylor suivant x (à t fixé), on a

$$u(t, x+h) = u(t, x) + h \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) + \mathcal{O}(h^2)$$

  ce qui entraine

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, x) = \frac{u(t, x+h) - u(t, x)}{h} + \mathcal{O}(h).$$

  On peut alors utiliser cette equation en $(t, x) = (t^n, x_i)$ et $h = \Delta_x$, pour obtenir

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t^n, x_i) = \frac{u(t^n, x_{i+1}) - u(t^n, x_i)}{\Delta_x} + \mathcal{O}(\Delta_x). \quad (2.14)$$

- étude de $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t^n, x_i)$ pour aboutir à $\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2}$.
  On va utiliser, classiquement, deux formules de Taylor à l'ordre 3 suivant x (t fixé), l'une en $x+h$ et l'autre en $x-h$. On a alors

$$u(t, x+h) = u(t, x) + h \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) + \frac{h^3}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(t, x) + \mathcal{O}(h^4), \quad (2.15)$$

$$u(t, x-h) = u(t, x) - h \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) - \frac{h^3}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(t, x) + \mathcal{O}(h^4). \quad (2.16)$$

  En effectuant la somme entre (2.15) et (2.16), on obtient

$$u(t, x+h) + u(t, x-h) = 2u(t, x) + h^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) + \mathcal{O}(h^4)$$

et on en déduit

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = \frac{u(t,x+h) - 2u(t,x) + u(t,x-h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2).$$

On peut alors utiliser cette equation en $(t,x) = (t^n, x_i)$ et $h = \Delta_x$, pour obtenir

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t^n,x_i) = \frac{u(t^n,x_{i+1}) - 2u(t^n,x_i) + u(t^n,x_{i-1})}{\Delta_x^2} + \mathcal{O}(\Delta_x^2). \tag{2.17}$$

En utilisant (2.13), (2.14) et (2.17), l'équation (2.12) s'écrit

$$\begin{aligned}\frac{u(t^{n+1},x_i) - u(t^n,x_i)}{\Delta_t} + \mathcal{O}(\Delta_t) - \alpha\left(\frac{u(t^n,x_{i+1}) - 2u(t^n,x_i) + u(t^n,x_{i-1})}{\Delta_x^2} + \mathcal{O}(\Delta_x^2)\right)&\\ + \beta\left(\frac{u(t^n,x_{i+1}) - u(t^n,x_i)}{\Delta_x} + \mathcal{O}(\Delta_x)\right)&\\ = f(t^n,x_i)&\end{aligned}$$

En négligeant les termes $\mathcal{O}(\Delta_t)$, $\mathcal{O}(\Delta_x)$ et $\mathcal{O}(\Delta_x^2)$, et en notant $u_i^n \approx u(t^n,x_i)$, on obtient l'équation approchée (2.11) avec $f_i^n = f(t^n,x_i)$.

b. Le schéma détaillé est:

$$\begin{cases} (2.11) & \forall n \in [\![0, N_t - 1]\!],\ \forall i \in [\![1, N_x - 1]\!], \\ u_i^0 = g_0(x_i) & \forall i \in [\![0, N_x]\!], \\ u_0^n = g_a(t^n) & \forall n \in [\![0, N_t]\!], \\ u_{N_x}^n = g_b(t^n) & \forall n \in [\![0, N_t]\!]. \end{cases}$$

c. Le schéma est explicite (car on peut exprimer explicitement u_i^{n+1} en fonction de l'ensemble des $(u_j^n)_{j=0}^{N_x}$)

d. Le schéma est d'ordre 1 en temps et d'ordre 1 en espace (car les termes prépondérants, dans les termes négligés $\mathcal{O}(\Delta_t)$, $\mathcal{O}(\Delta_x)$ et $\mathcal{O}(\Delta_x^2)$ précédemment, sont $\mathcal{O}(\Delta_t)$ et $\mathcal{O}(\Delta_x)$)

e. Il faudrait établir une formule d'ordre 2 de $\frac{\partial u}{\partial x}(t^n,x_i)$, en utilisant deux formules de Taylor, l'une en $x_i + \Delta_x$ et l'autre en $x_i - \Delta_x$. On aurait alors

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t^n,x_i) = \frac{u(t^n,x_{i+1}) - u(t^n,x_{i-1})}{2\Delta_x} + \mathcal{O}(\Delta_x^2).$$

On note $\boldsymbol{U}^n$ les vecteurs de dimension N_x+1, de composantes $\boldsymbol{U}_i^n = u_{i-1}^n$, $\forall i \in [\![1, N_x + 1]\!]$.

Q. 4 a. *Comment initialiser le vecteur* $\boldsymbol{U}^0$ *?*

b. *En supposant le vecteur* $\boldsymbol{U}^n$ *déjà calculé, décrire le calcul du vecteur* $\boldsymbol{U}^{n+1}$.

□

R. 4 a. Le vecteur $\boldsymbol{U}^0$ va être initialisé à l'aide de la condition initiale (2.8):

$$\boldsymbol{U}_i^0 = g_0(x_{i+1}),\ \forall i \in [\![1, N_x + 1]\!].$$

b. L'équation (2.11) peut se réécrire sous la forme

$$u_i^{n+1} = Au_{i+1}^n + Bu_i^n + Cu_{i-1}^n + \Delta_t f_i^n$$

avec

$$A = -1 - \beta\frac{\Delta_t}{\Delta_x} + \alpha\frac{\Delta_t}{\Delta_x^2}, \ B = 1 + \beta\frac{\Delta_t}{\Delta_x} - \alpha\frac{\Delta_t}{\Delta_x^2}, \ C = \alpha\frac{\Delta_t}{\Delta_x^2}.$$

Comme on ne peut utiliser cette équation que pour $i \in]\!]0, N_x[\![$, on utilise les condititions aux limites (2.9) et (2.10) pour obtenir

$$u_0^{n+1} = g_a(t^{n+1}) \ \text{ et } \ u_{N_x}^{n+1} = g_b(t^{n+1}).$$

Et donc, connaissant $\boldsymbol{U}^n$, on peut déterminer $\boldsymbol{U}^{n+1}$.

Q. 5 *On suppose les données du problème* (2.7) *à* (2.10) *fournies. Ecrire un algorithme complet de résolution du problème* (2.7) *à* (2.10) *en utilisant le schéma* (2.11). □

R. 5 En supposant les données du problème (2.7) à (2.10) fournies, on va stocker l'ensemble des vecteurs $\boldsymbol{U}^n \in \mathbb{R}^{N_x+1}$, $n \in [\![0, N_t]\!]$, dans une matrice $\mathbb{U} \in \mathcal{M}_{N_x+1,N_t+1}(\mathbb{R})$, le stockage des $\boldsymbol{U}^n$ se faisant colonne par colonne:

$$\mathbb{U}(:, n+1) = \boldsymbol{U}^n, \quad \forall n \in [\![0, N_t]\!].$$

$Nx \leftarrow 50$, $Nt \leftarrow 1000$. ▷ Nb de pas des discrétisations
$\boldsymbol{x} \leftarrow$ DisReg(a, b, Nx) ▷ a et b supposés donnés
$\Delta_x \leftarrow (b-a)/N_x$
$\boldsymbol{t} \leftarrow$ DisReg$(0, T, Nt)$ ▷ T supposé donné
$\Delta_t \leftarrow T/N_t$
$A \leftarrow -1 - \beta * \Delta_t/\Delta_x + \alpha * \Delta_t/\Delta_x^2$
$B \leftarrow 1 + \beta * \Delta_t/\Delta_x - \alpha * \Delta_t/\Delta_x^2$
$C \leftarrow \alpha * \Delta_t/\Delta_x^2$
$\mathbb{U}(:, 1) \leftarrow g_0(\boldsymbol{x})$ ▷ g_0 supposé donné, et vectorisée
Pour $n \leftarrow 1$ **à** N_t **faire** ▷ Calcul de $\mathbb{U}(:, n+1)$
  $\mathbb{U}(1, n+1) \leftarrow g_a(\boldsymbol{t}(n+1))$ ▷ g_a supposé donné
  Pour $i \leftarrow 2$ **à** N_x **faire** ▷ f supposé donné
    $\mathbb{U}(i, n+1) \leftarrow A * \mathbb{U}(i+1, n) + B * \mathbb{U}(i, n) + C * \mathbb{U}(i-1, n) + \Delta_t * f(\boldsymbol{t}(n), \boldsymbol{x}(i))$
  Fin Pour
  $\mathbb{U}(N_x+1, n+1) \leftarrow g_b(\boldsymbol{t}(n+1))$ ▷ g_b supposé donné
Fin Pour

La fonction DisReg étant donnée par:

Algorithme 5 Fonction DisReg : discrétisation régulière de $[a, b]$ avec $(N + 1)$ points, retourne l'ensemble des points $(x_i)_{i=0}^{N}$ tels que $x_i = a + ih$ avec $h = (b - a)/N$.

Données : a, b : deux réels, (a<b)
N : un entier non nul (nombre de pas de discrétisation).
Résultat : $\mathbf{X}$: vecteur de $\mathbb{R}^{N+1}$, $\mathbf{X}(i) = x_{i-1}, \ \forall i \in [\![1, N + 1]\!]$

Fonction $\mathbf{X} \leftarrow$ DisReg(a, b, N)
  $h \leftarrow (b - a)/N$
  Pour $i \leftarrow 1$ **à** $N + 1$ **faire**
    $\mathbf{X}(i) \leftarrow a + (i - 1) * h$
  Fin Pour
Fin Fonction