

Analyse Numérique I*

Sup'Galilée, Ingénieurs Energétique, 1ère année

François Cuvelier

Laboratoire d'Analyse Géométrie et Applications
Institut Galilée
Université Paris XIII.

2025/02/02

- Chapitre I : Algorithmique numérique
- Chapitre II : Dérivation numérique**
- Chapitre III : Résolution numérique des E.D.O.
- Chapitre IV : Résolution numérique des E.D.P.

- 1 Résultats mathématiques
 - Rappels ou pas
 - Approximations d'ordre 1 et 2
- 2 Applications numériques
 - Quelques définitions
 - Exercice
 - Illustration des ordres 1 et 2

♥ Définition

Soit g une fonction et $q \in \mathbb{N}$. On dit que g **se comporte comme un grand O de h^q** quand h tend vers 0 si et seulement si il existe $H > 0$ et $C > 0$ tel que

$$\forall h \in]-H, H[, \quad |g(h)| \leq C|h|^q.$$

On note alors $g(h) = \mathcal{O}(h^q)$.

On peut noter entre autres

- $\forall \alpha \in \mathbb{R}^*$,

$$g(h) = \mathcal{O}(h^q) \Rightarrow \alpha g(h) = \mathcal{O}(h^q),$$

- $\forall p \in \mathbb{Z}, p + q \geq 0$,

$$g(h) = \mathcal{O}(h^q) \Rightarrow h^p g(h) = \mathcal{O}(h^{p+q}).$$

- $\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, \forall (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$,

$$g_1(h) = \mathcal{O}(h^p), g_2(h) = \mathcal{O}(h^q) \Rightarrow \alpha_1 g_1(h) + \alpha_2 g_2(h) = \mathcal{O}(h^{\min(p,q)}).$$



Proposition 1.1 : Développement de Taylor

Soit f une application $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Si $f \in \mathcal{C}^{r+1}([a, b])$ alors le **développement de Taylor à l'ordre r** s'écrit

- $\forall (x, y) \in [a, b]^2$ il existe un $\xi \in]\min(x, y), \max(x, y)[$ tel que

$$f(x) = f(y) + \sum_{k=1}^r \frac{f^{(k)}(y)}{k!} (x - y)^k + \frac{f^{(r+1)}(\xi)}{(r+1)!} (x - y)^{r+1} \quad (1)$$

- $\forall t \in [a, b], \forall h \in \mathbb{R}^*$ vérifiant $(t + h) \in [a, b]$, il existe $\xi \in]\min(t, t + h), \max(t, t + h)[$ tel quel

$$f(t + h) = f(t) + \sum_{k=1}^r \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(t) + \frac{h^{r+1}}{(r+1)!} f^{(r+1)}(\xi) \quad (2)$$

- $\forall t \in [a, b], \forall h \in \mathbb{R}^*$ vérifiant $(t + h) \in [a, b]$, alors

$$f(t + h) = f(t) + \sum_{k=1}^r \frac{f^{(k)}(t)}{k!} h^k + \mathcal{O}(h^{r+1}). \quad (3)$$

Exercice 1

Soit $\varphi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

Q. 1

Montrer que si $\varphi \in \mathcal{C}^2([a, b]; \mathbb{R})$ alors $\forall x \in [a, b[, \forall h > 0$ tel que $(x + h) \in [a, b]$, on a

$$\frac{d\varphi}{dx}(x) = \frac{\varphi(x + h) - \varphi(x)}{h} + \mathcal{O}(h) \quad (1)$$

Q. 2

Montrer que si $\varphi \in \mathcal{C}^2([a, b]; \mathbb{R})$ alors $\forall x \in]a, b], \forall h > 0$ tel que $(x - h) \in [a, b]$, on a

$$\frac{d\varphi}{dx}(x) = \frac{\varphi(x) - \varphi(x - h)}{h} + \mathcal{O}(h) \quad (2)$$

Q. 3

Montrer que si $\varphi \in \mathcal{C}^3([a, b]; \mathbb{R})$ alors $\forall x \in]a, b[, \forall h > 0$ tel que $(x + h) \in [a, b]$ et $(x - h) \in [a, b]$, on a

$$\frac{d\varphi}{dx}(x) = \frac{\varphi(x + h) - \varphi(x - h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \quad (3)$$

Q. 4

Montrer que si $\varphi \in \mathcal{C}^4([a, b]; \mathbb{R})$ alors $\forall x \in]a, b[, \forall h > 0$ tel que $(x + h) \in [a, b]$ et $(x - h) \in [a, b]$, on a

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}(x) = \frac{\varphi(x + h) - 2\varphi(x) + \varphi(x - h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2) \quad (4)$$

♥ Définition 1.1

Soit $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction suffisamment régulière. Soient $x \in \mathbb{R}$, $h \in \mathbb{R}^{+*}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$. On dit que $\square_h(x)$ est une **approximation d'ordre p de $\frac{d^n \varphi}{dx^n}(x)$** si

$$\frac{d^n \varphi}{dx^n}(x) - \square_h(x) = \mathcal{O}(h^p)$$

On a donc établi:

Soient $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction suffisamment régulière, $x \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}^{+*}$.

- $\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h}$ et $\frac{\varphi(x) - \varphi(x-h)}{h}$ sont des approximations d'ordre 1 de $\frac{d\varphi}{dx}(x)$,
- $\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x-h)}{2h}$ est une approximation d'ordre 2 de $\frac{d\varphi}{dx}(x)$,
- $\frac{\varphi(x+h) - 2\varphi(x) + \varphi(x-h)}{h^2}$, est une approximation d'ordre 2 de $\frac{d^2\varphi}{dx^2}(x)$.

Existe-t'il d'autres approximations d'ordre 2 de $\frac{d\varphi}{dx}(x)$?

Exercice 2

Soit $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction suffisamment régulière, $x \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}^{+*}$.

Q. 1 Montrer que

$$\frac{d\varphi}{dx}(x) = \frac{-3\varphi(x) + 4\varphi(x+h) - \varphi(x+2h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \quad (1)$$

Q. 2 Montrer que

$$\frac{d\varphi}{dx}(x) = \frac{3\varphi(x) - 4\varphi(x-h) + \varphi(x-2h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \quad (2)$$

Ces résultats impliquent:

$$\frac{-3\varphi(x) + 4\varphi(x+h) - \varphi(x+2h)}{2h} \quad \text{et} \quad \frac{3\varphi(x) - 4\varphi(x-h) + \varphi(x-2h)}{2h}$$

sont des approximations d'ordre 2 de $\frac{d\varphi}{dx}(x)$.

- 1 Résultats mathématiques
 - Rappels ou pas
 - Approximations d'ordre 1 et 2
- 2 Applications numériques
 - Quelques définitions
 - Exercice
 - Illustration des ordres 1 et 2

♥ Définition 2.1

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On appelle **discrétisation régulière de $[a, b]$ à N pas ou $(N+1)$ points** l'ensemble des points $a + nh$, $n \in \llbracket 0, N \rrbracket$ où le pas h est donné par $h = (b - a)/N$.

Soit $y : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction suffisamment régulière. On note $t^n = a + nh$, $n \in \llbracket 0, N \rrbracket$, une **discrétisation régulière de $[a, b]$** . On appelle

- **différence finie progressive** l'approximation de $y'(t^n)$ suivante:

$$\frac{y(t^{n+1}) - y(t^n)}{h}, \quad \forall n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket \quad (5)$$

- **différence finie rétrograde** l'approximation de $y'(t^n)$ suivante:

$$\frac{y(t^n) - y(t^{n-1})}{h}, \quad \forall n \in \llbracket 1, N \rrbracket \quad (6)$$

- **différence finie centrée** l'approximation de $y'(t^n)$ suivante:

$$\frac{y(t^{n+1}) - y(t^{n-1})}{2h}, \quad \forall n \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket \quad (7)$$

On a démontré le lemme suivant

 Lemme 2.1

Si $y \in \mathcal{C}^2([a, b])$ alors

$$y'(t^n) = \frac{y(t^{n+1}) - y(t^n)}{h} + \mathcal{O}(h), \quad \forall n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket, \quad (8)$$

$$y'(t^n) = \frac{y(t^n) - y(t^{n-1})}{h} + \mathcal{O}(h), \quad \forall n \in \llbracket 1, N \rrbracket. \quad (9)$$

Si $y \in \mathcal{C}^3([a, b])$ alors

$$y'(t^n) = \frac{y(t^{n+1}) - y(t^{n-1})}{2h} + \mathcal{O}(h^2), \quad \forall n \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket. \quad (10)$$

Exercice 3

Soit $f \in \mathcal{C}^3([a, b]; \mathbb{R})$. On note t^n , $n \in \llbracket 0, N \rrbracket$, une discrétisation **régulière** de $[a, b]$ de pas h . On note $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{N+1}$ le vecteur défini par $F_{n+1} = f(t^n)$, $\forall n \in \llbracket 0, N \rrbracket$.

Q. 1

- ① Déterminer en fonction de h et $\mathbf{F}$, un vecteur $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{N+1}$ vérifiant

$$V_{n+1} = f'(t^n) + \mathcal{O}(h), \quad \forall n \in \llbracket 0, N \rrbracket.$$

- ② Ecrire une fonction algorithmique, nommée **Derive1Ordre1**, permettant, à partir du vecteur $\mathbf{F}$ et de la discrétisation régulière, de calculer le vecteur $\mathbf{V}$ précédent.

Q. 2

- ① Connaissant uniquement h et le vecteur $\mathbf{F}$, déterminer un vecteur $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{N+1}$ vérifiant

$$W_n = f'(t^n) + \mathcal{O}(h^2), \quad \forall n \in \llbracket 0, N \rrbracket$$

- ② Ecrire une fonction algorithmique, nommée **Derive1Ordre2**, permettant, à partir du vecteur $\mathbf{F}$ et de la discrétisation régulière, de calculer le vecteur $\mathbf{W}$ précédent.

❖ On cherche à *visualiser* l'erreur commise par les deux méthodes

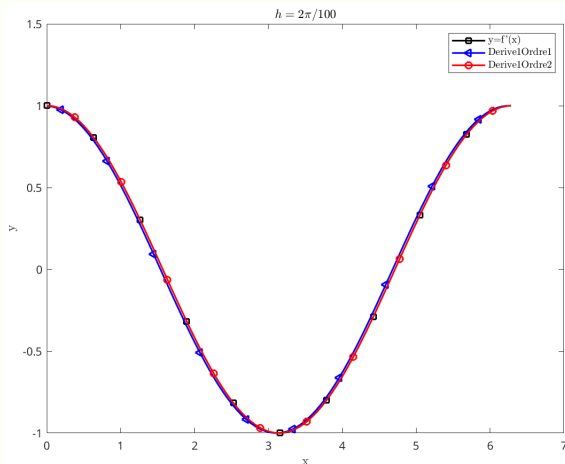
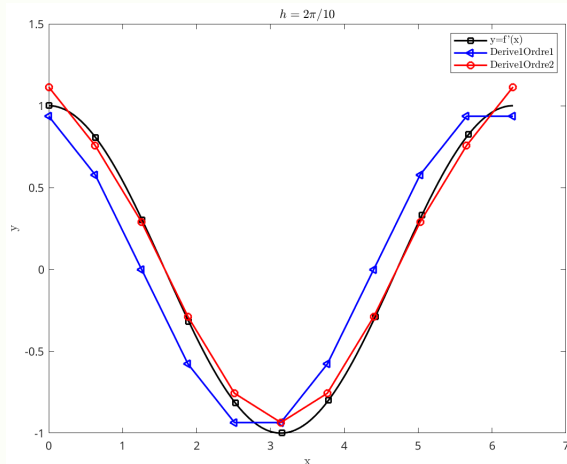


Figure: Représentation des dérivées numériques avec $f(x) = \sin(x)$, $a = 0$, $b = 2\pi$. À gauche $h = \frac{2\pi}{10}$, à droite $h = \frac{2\pi}{100}$.

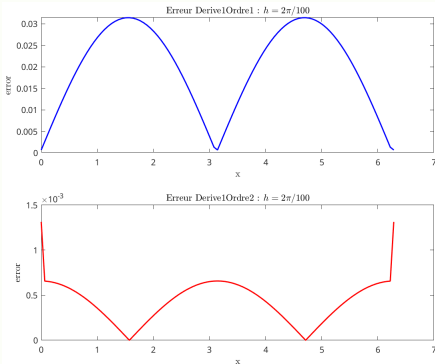
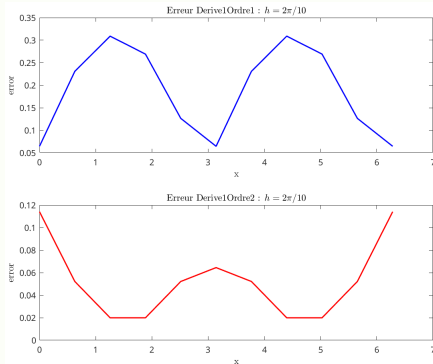


Figure: Erreur des dérivées numériques avec $f(x) := \sin(x)$, $a = 0$, $b = 2\pi$. A gauche $h = \frac{2\pi}{10}$, à droite $h = \frac{2\pi}{100}$.

- Dérivée première d'ordre 1 :

h a été divisé par 10 $\implies$ l'erreur, $\mathcal{O}(h)$, divisée par 10.

- Dérivée première d'ordre 2 :

h a été divisé par 10 $\implies$ l'erreur, $\mathcal{O}(h^2)$, divisée par 100.

Exercice 4

On suppose écrites les fonctions Matlab/Octave `Derive1Ordre1` et `Derive1Ordre2` correspondant aux fonctions algorithmiques de l'exercice 3. Leurs syntaxes sont les suivantes:

$$V = \text{Derive1Ordre1}(h, F) \quad \text{et} \quad W = \text{Derive1Ordre2}(h, F)$$

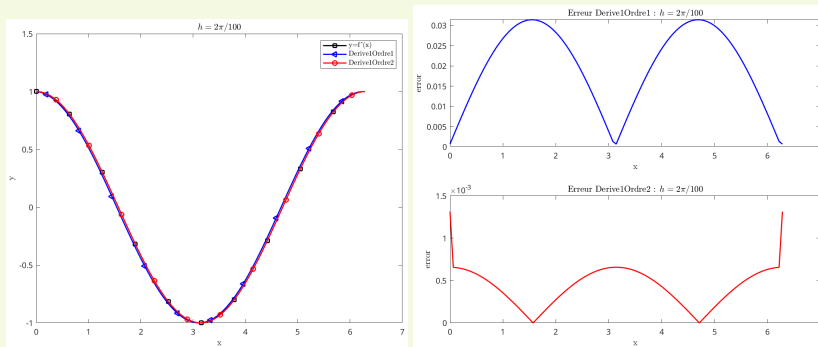


Figure: Avec $f(x) = \sin(x)$, $a = 0$, $b = 2\pi$, $N = 100$, à gauche, les différentes dérivées, à droite les erreurs commises par les deux fonctions.

Q. 1

Ecrire un programme Matlab/Octave permettant de reproduire ces deux graphiques.

❖ On cherche à *visualiser* l'ordre des deux méthodes

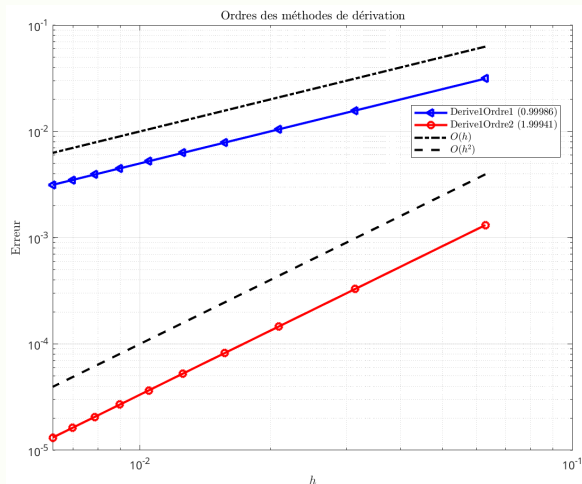


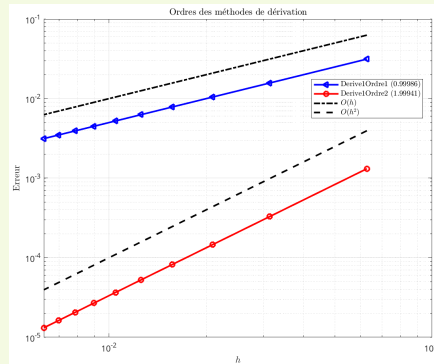
Figure: Dérivation numérique : mise en évidence de l'ordre des méthodes

Figure en échelle logarithmique : intérêt de *monter* en ordre.

Exercice 5

Voici une figure mettant en évidence l'ordre des méthodes utilisées dans les fonctions `Derive1Order1` et `Derive1Order2` de l'exercice 3. On suppose écrites les fonctions Matlab/Octave `Derive1Order1` et `Derive1Order2` correspondant à ces deux fonctions algorithmiques et on suppose que leurs syntaxes sont les suivantes:

$$V = \text{Derive1Order1}(h, F) \quad \text{et} \quad W = \text{Derive1Order2}(h, F)$$



Q. 1

- ① Ecrire un programme Matlab/Octave permettant de calculer l'ensemble des données nécessaires à la représentation graphique de l'ordre des deux méthodes (voir figure).
- ② A l'aide de ces données, calculer numériquement l'ordre des deux méthodes.

Les commandes Matlab/Octave permettant de représenter des données en échelles logarithmique sont `loglog`, `semilogx` et `semilogy`. Elles s'utilisent globalement comme la fonction `plot`.

Q. 2

Ajouter au programme précédent le code permettant de reproduire la figure.