

Analyse Numérique I*

Sup'Galilée, Ingénieurs Energétique, 1ère année

François Cuvelier

Laboratoire d'Analyse Géométrie et Applications
Institut Galilée
Université Paris XIII.

2025/02/02

- Chapitre I : Algorithmique numérique
- Chapitre II : Dérivation numérique
- Chapitre III : Résolution numérique des E.D.O.**
- Chapitre IV : Résolution numérique des E.D.P.

- 1 Exemples d'E.D.O.
 - Chimie : réaction BZ
 - Météorologie : modèle de Lorentz (1963)
 - Mécanique : le pendule pesant
- 2 Définitions et résultats
- 3 Problème de Cauchy
- 4 Différences finies $m = 1$
- 5 Différences finies $m > 1$
- 6 ... suite au prochain épisode

Réaction BZ (Belousov-Zhabotinsky)



(a) *Boris Pavlovich Belousov*
1893-1970, Chimiste et biophysicien
russe



(b) *Anatol Zhabotinsky* 1938-2008,
Chimiste russe



(c) *Ilya Prigogine* 1917-2003,
Physicien et chimiste belge (origine
russe). Prix Nobel de chimie en 1977

Modèle du Brusselator (1970)

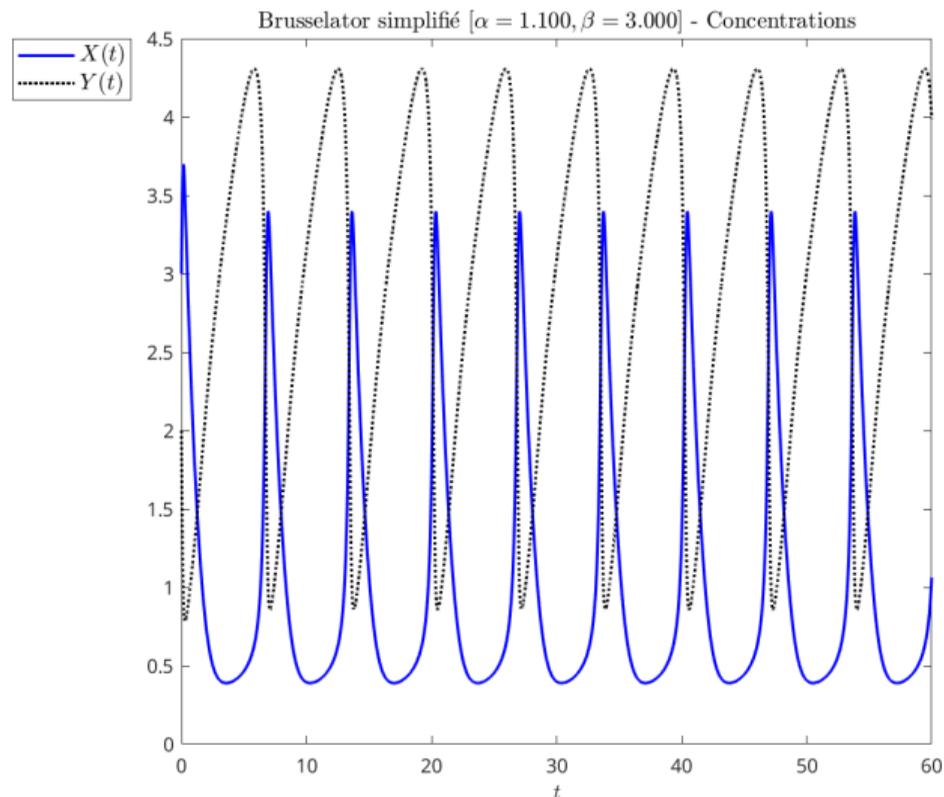
Une solution de bromate de potassium et d'acide sulfurique mélangée à une solution d'acide manolique et de bromure de sodium peut entraîner, sous certaines conditions, une oscillation de la couleur de la solution mélange du rouge au bleue avec une période de 7 secondes.

Le modèle associé est nommé **modèle du brusselator**. Sous certaines hypothèses, le modèle simplifié peut s'écrire :

$$\begin{cases} X'(t) &= 1 + \alpha X^2(t)Y(t) - (\beta + 1)X(t) \\ Y'(t) &= -\alpha X^2(t)Y(t) + \beta X(t) \end{cases} \quad (1)$$

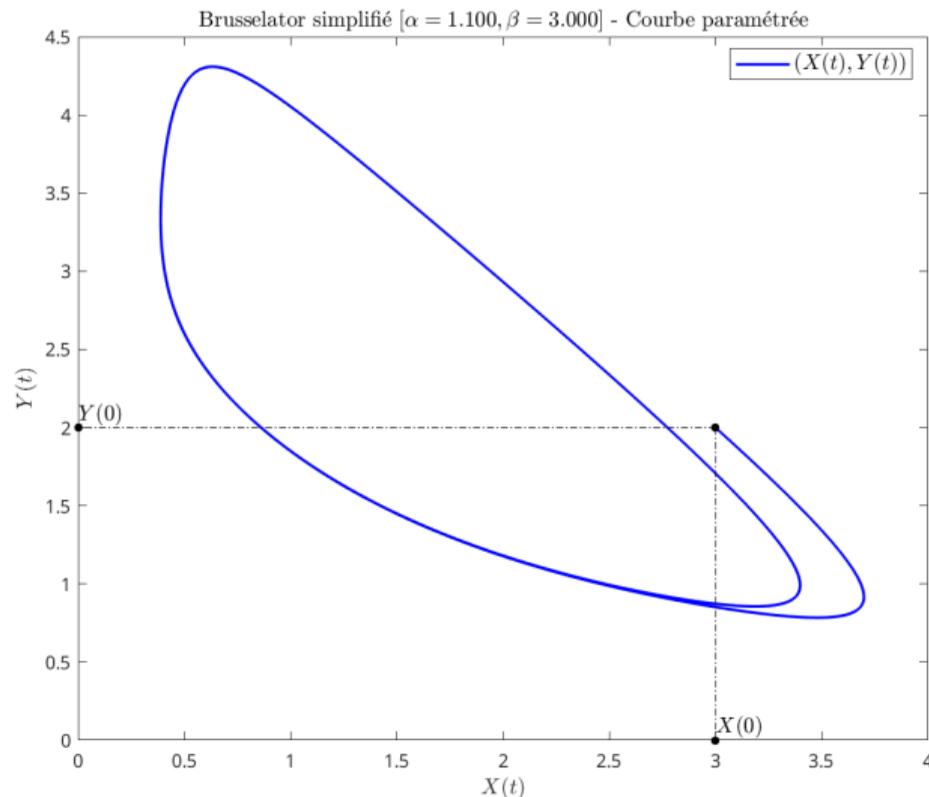
Modèle du Brusselator

Avec $\alpha = 1.1$, $\beta = 3$ et les C.I. $X(0) = 3$ et $Y(0) = 2$:



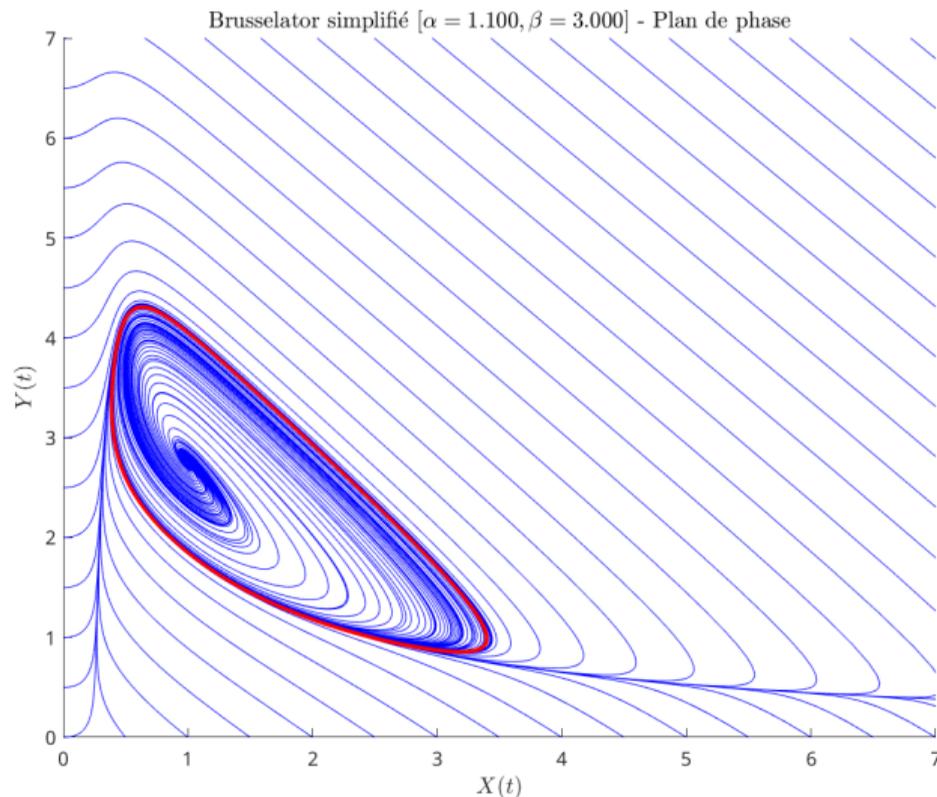
Modèle du Brusselator

Avec $\alpha = 1.1$, $\beta = 3$ et les C.I. $X(0) = 3$ et $Y(0) = 2$:



Modèle du Brusselator

Avec $\alpha = 1$, $\beta = 3$ et les C.I. $X(0) = 3$ et $Y(0) = 2$:





(a) *Edward Norton Lorenz*
1917-2008, Mathématicien et
météorologiste américain

Le couplage Océan-Atmosphère est décrit par un système d'E.D.P. couplées de Navier-Stokes de la mécanique des fluides.

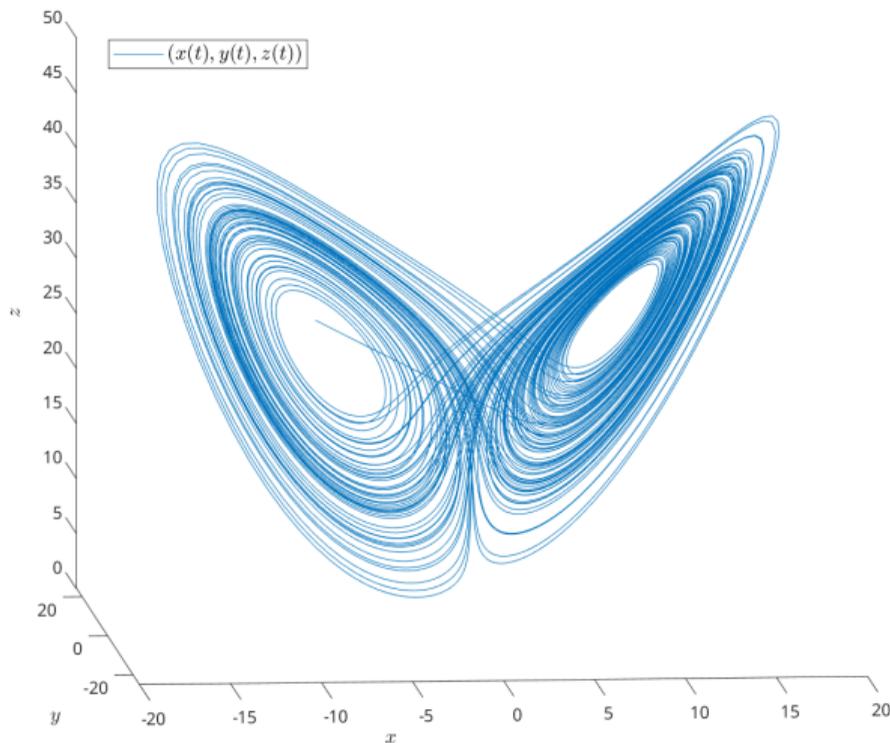
Le **modèle de Lorenz** est une version très simplifiée de ces équations pour l'étude du phénomène de convection de Rayleigh-Bénard :

$$\begin{cases} x'(t) &= -\sigma x(t) + \sigma y(t) \\ y'(t) &= -x(t)y(t) + \rho x(t) - y(t) \\ z'(t) &= x(t)y(t) - \beta z(t) \end{cases}$$

- $x(t)$: proportionnel à l'intensité du mouvement de convection,
- $y(t)$: proportionnel à la différence de température entre les courants ascendants et descendants,
- $z(t)$: proportionnel à une variation de température

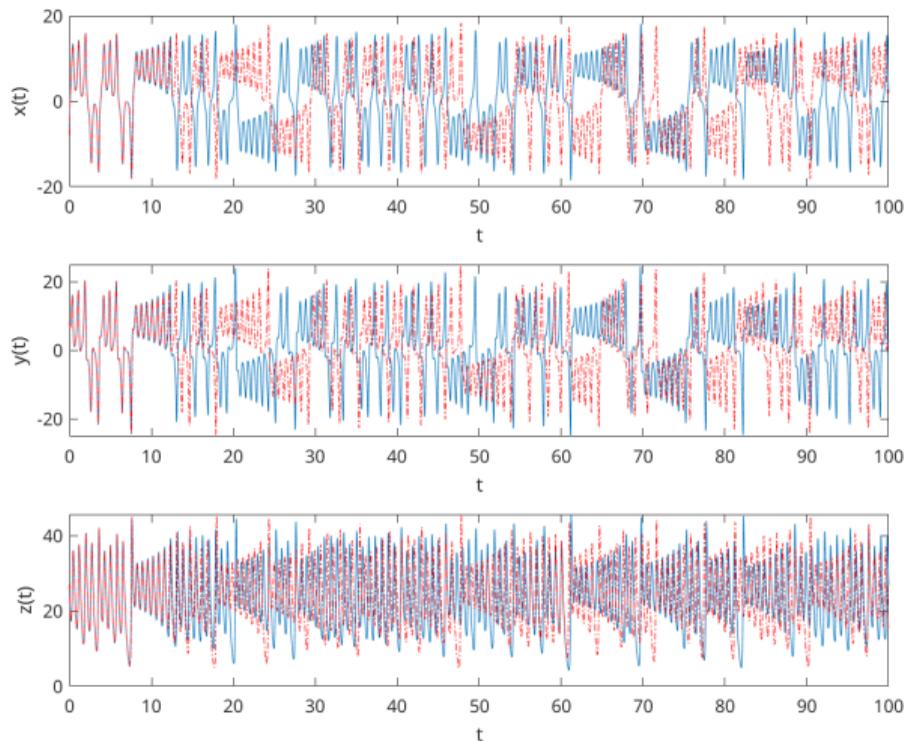
Modèle de Lorentz : papillon

En représentant la courbe paramétré $(x(t), y(t), z(t))$ dans l'espace, on obtient l'*attracteur étrange de Lorenz* en forme d'aile de papillon



Modèle de Lorentz

Avec $\sigma = 10$, $\rho = 28$, $\beta = 8/3$ et les données initiales $x(0) = -8, y(0) = 8, z(0) = 27$ (courbe bleue) et des données initiales *perturbées* $x(0) = -8 + 1e^{-4}, y(0) = 8, z(0) = 27$ (courbe rouge pointillée)

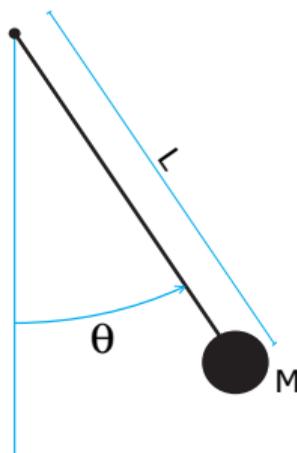


Pendule pesant sans viscosité

Le pendule pesant : objet pesant accroché à une tige de masse négligeable, l'autre extrémité de la tige est l'axe de rotation du pendule.

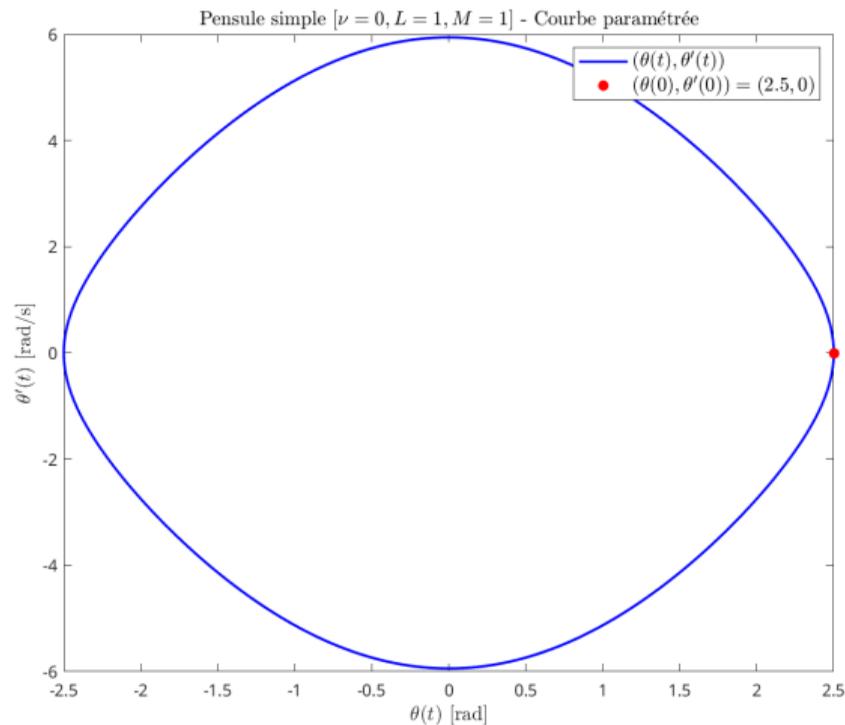
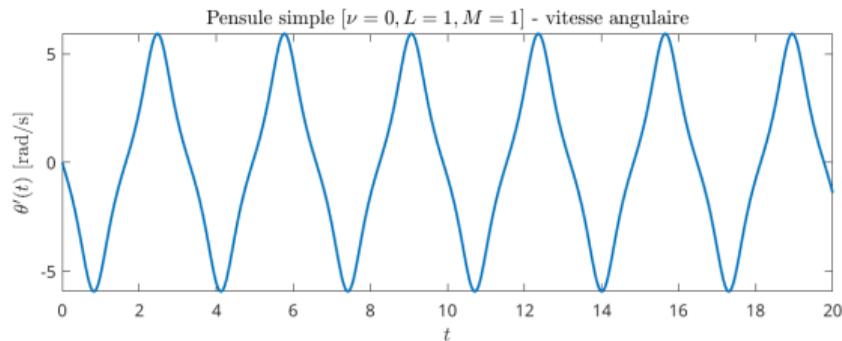
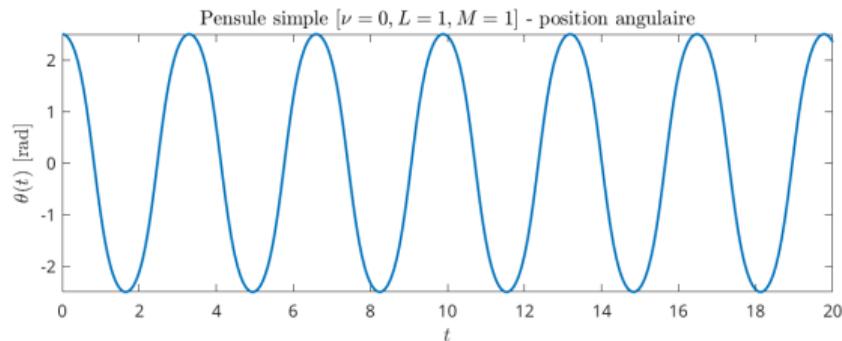
$$\theta''(t) + \frac{g}{L} \sin(\theta(t)) = 0. \quad (2)$$

où $\theta(t)$ est l'angle que fait, à l'instant t , le pendule par rapport à l'axe vertical, L la longueur de la tige.



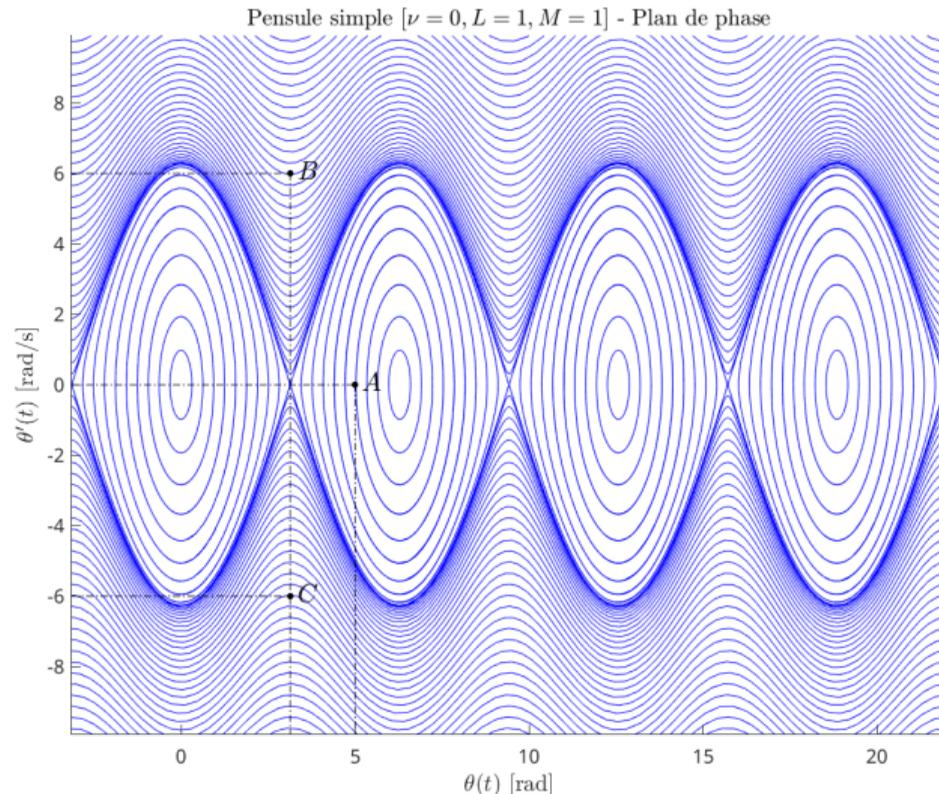
Pendule pesant sans viscosité

Avec $\frac{g}{L} = 3$ et les C.I. $\theta_0 = \frac{5\pi}{6}$, $\theta'_0 = 0$:



Pendule pesant sans viscosité

Avec $\frac{g}{L} = 3$ et les C.I. $\theta_0 = \frac{5\pi}{6}$, $\theta'_0 = 0$:



- 1 Exemples d'E.D.O.
 - Chimie : réaction BZ
 - Météorologie : modèle de Lorentz (1963)
 - Mécanique : le pendule pesant
- 2 Définitions et résultats**
- 3 Problème de Cauchy
- 4 Différences finies $m = 1$
- 5 Différences finies $m > 1$
- 6 ... suite au prochain épisode

Soit $\mathbf{y} : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ de classe \mathcal{C}^p (continûment dérivable d'ordre p).

On note $\mathbf{y}^{(k)}$ la dérivée d'ordre k de \mathbf{y} .

♥ Définition 2.1

On appelle **équation différentielle ordinaire (E.D.O.) d'ordre p** une équation de la forme :

$$\mathcal{F}(t, \mathbf{y}(t), \mathbf{y}^{(1)}(t), \mathbf{y}^{(2)}(t), \dots, \mathbf{y}^{(p)}(t)) = 0.$$

♥ Définition 2.2

On appelle **forme canonique d'une E.D.O.** une expression du type :

$$\mathbf{y}^{(p)}(t) = \mathcal{G}(t, \mathbf{y}(t), \mathbf{y}^{(1)}(t), \mathbf{y}^{(2)}(t), \dots, \mathbf{y}^{(p-1)}(t)). \quad (3)$$

Proposition 2.1

Toute équation différentielle d'ordre p sous forme canonique peut s'écrire comme un système de p équations différentielles d'ordre 1.

- 1 Exemples d'E.D.O.
 - Chimie : réaction BZ
 - Météorologie : modèle de Lorentz (1963)
 - Mécanique : le pendule pesant
- 2 Définitions et résultats
- 3 Problème de Cauchy**
- 4 Différences finies $m = 1$
- 5 Différences finies $m > 1$
- 6 ... suite au prochain épisode

♥ Définition 3.1 : *problème de Cauchy*



Soit f l'application continue donnée par

$$\begin{aligned} f &: [t^0, t^0 + T] \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m \\ (t, \mathbf{y}) &\longmapsto \mathbf{f}(t, \mathbf{y}) \end{aligned}$$

avec $T \in]0, +\infty[$. Le **problème de Cauchy** consiste à déterminer une fonction \mathbf{y} définie par

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &: [t^0, t^0 + T] \longrightarrow \mathbb{R}^m \\ t &\longmapsto \mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_m(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

continue et dérivable, telle que

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)), \quad \forall t \in [t^0, t^0 + T] \quad (4)$$

$$\mathbf{y}(t^0) = \mathbf{y}^{[0]} \in \mathbb{R}^m. \quad (5)$$

$$(C) \quad \begin{cases} \mathbf{y}'(t) &= \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)), \quad \forall t \in [t^0, t^0 + T] \\ \mathbf{y}(t^0) &= \mathbf{y}^{[0]} \in \mathbb{R}^m. \end{cases}$$

Exercice

Quelles sont les données du problème de Cauchy?

$$(C) \quad \begin{cases} \mathbf{y}'(t) &= \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)), \quad \forall t \in [t^0, t^0 + T] \\ \mathbf{y}(t^0) &= \mathbf{y}^{[0]} \in \mathbb{R}^m. \end{cases}$$

Exercice

Quelles sont les données du problème de Cauchy?

- $t^0 \in \mathbb{R}$, $T \in \mathbb{R}^{+*}$, $m \in \mathbb{N}^*$
- la fonction \mathbf{f}
- le vecteur $\mathbf{y}^{[0]} \in \mathbb{R}^m$

Exercice

Pour chacune des E.D.O. suivantes écrire le problème de Cauchy associé

$$(a) \begin{cases} x''(t) + \alpha x'(t) + \beta \cos(x(t)) = \sin(t), & t \in]0, 2\pi] \\ x(0) = 0, & x'(0) = 1. \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} LCv''(t) + \left(\frac{L}{R_2} + R_1 C\right) v'(t) + \left(\frac{R_1}{R_2} + 1\right) v(t) = e, & t \in]0, 100] \\ v(0) = 0, & v'(0) = 0. \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} x''(t) = \mu(1 - x^2(t))x'(t) - x(t), & t \in]0, 10] \\ x(0) = 1, & x'(0) = -1. \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} y^{(3)}(t) - \cos(t)y^{(2)}(t) + 2\sin(t)y^{(1)}(t) - y(t) = 0, & t \in]0, T] \\ y(0) = u_0, & y^{(1)}(0) = v_0, & y^{(2)}(0) = w_0. \end{cases}$$

$$(e) \begin{cases} \forall t \in]0, T], & x_1''(t) - 2x_2'(t) + 3x_1'(t) + 4x_1(t)x_2(t) = \sin(t), \\ & x_2''(t) + 3x_1'(t) - 2x_2'(t) - 3x_1(t)x_2(t) = \cos(t), \\ x_1(0) = 0, & x_1'(0) = -1, & x_2(0) = 1, & x_2'(0) = -2. \end{cases}$$

Exercice

Déterminer le problème de Cauchy associé au modèle du Brusselator simplifié :

$$(\mathcal{B}) \quad \begin{cases} X'(t) &= 1 + \alpha X^2(t)Y(t) - (\beta + 1)X(t) \\ Y'(t) &= -\alpha X^2(t)Y(t) + \beta X(t) \end{cases}$$

avec C.I. $X(0) = X_0$ et $Y(0) = Y_0$.

Exercice

Déterminer le problème de Cauchy associé au modèle du pendule pesant simplifié :

$$(\mathcal{P}) \quad \theta^{(2)}(t) + \frac{g}{L} \sin(\theta(t)) = 0.$$

avec C.I. $\theta(0) = \theta_0$ et $\theta'(0) = \theta'_0$.

- Problème de Cauchy **linéaire** :

$$\begin{cases} y'(t) &= 3y(t) - 3t, \text{ si } t > 0 \\ y(0) &= 1 \end{cases}$$

On a $f(t, v) = 3v - 3t$ et une solution $y(t) = (1 - 1/3)e^{3t} + t + 1/3$.

- Problème **non-linéaire** :

$$\begin{cases} y'(t) &= \sqrt[3]{y(t)}, \text{ si } t > 0 \\ y(0) &= 0 \end{cases}$$

On a $f(t, v) = \sqrt[3]{v}$ et **trois solutions** $y(t) = 0$, $y(t) = \sqrt{8t^3/27}$ et $y(t) = -\sqrt{8t^3/27}$.

$$(\mathcal{PC}) \quad \begin{cases} \mathbf{y}'(t) &= \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)) \\ \mathbf{y}(t^0) &= \mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^m. \end{cases}$$

avec $\mathbf{f} : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ et $(t^0, \mathbf{y}^{[0]}) \in U$.

Théorème 3.1 : Cauchy-Lipschitz

On suppose que la fonction \mathbf{f} est continue sur U et qu'elle est localement lipschitzienne en \mathbf{y} :
 $\forall (t, \mathbf{y}) \in U, \exists \mathcal{W}$ voisinage \mathbf{t} , $\exists \mathcal{V}$ voisinage \mathbf{y} , $\exists L > 0$ tels que

$$\forall s \in \mathcal{W}, \forall (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathcal{V}^2, \quad \|\mathbf{f}(s, \mathbf{u}) - \mathbf{f}(s, \mathbf{v})\| \leq L \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| \quad (6)$$

Sous ces hypothèses le problème de Cauchy (\mathcal{PC}) admet une unique solution.

Proposition 3.1

Si $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}}(t, \mathbf{y})$ est continue et bornée, alors \mathbf{f} satisfait (6).

- 1 Exemples d'E.D.O.
 - Chimie : réaction BZ
 - Météorologie : modèle de Lorentz (1963)
 - Mécanique : le pendule pesant
- 2 Définitions et résultats
- 3 Problème de Cauchy
- 4 Différences finies $m = 1$**
- 5 Différences finies $m > 1$
- 6 ... suite au prochain épisode

On veut résoudre le problème de Cauchy **scalaire**:

$$(\mathcal{PC}) \quad \begin{cases} y'(t) &= f(t, y(t)), \quad \forall t \in [t^0, t^0 + T] \\ y(t^0) &= y_0 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

avec $f : [t^0, t^0 + T] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. On a vu (chapitre *Dérivation numérique*):

$$\begin{aligned} y'(t^n) &= \frac{y(t^n + h) - y(t^n)}{h} + \mathcal{O}(h) \\ \Rightarrow f(t^n, y(t^n)) &= \frac{y(t^{n+1}) - y(t^n)}{h} + \mathcal{O}(h) \end{aligned}$$

La méthode d'**Euler progressive** est alors donnée par le schéma

$$\begin{cases} y^{[n+1]} &= y^{[n]} + hf(t^n, y^{[n]}), \quad \forall n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket \\ y^{[0]} &= y(t^0) \end{cases} \quad (7)$$

avec $y^{[n]} \approx y(t^n)$.

Ce schéma est **explicite**, car il permet le calcul direct de $y^{[n+1]}$ en fonction de $y^{[n]}$.

On veut résoudre le problème de Cauchy **scalaire**:

$$(\mathcal{PC}) \quad \begin{cases} y'(t) &= f(t, y(t)), \quad \forall t \in [t^0, t^0 + T] \\ y(t^0) &= y_0 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

avec $f : [t^0, t^0 + T] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. On a vu (chapitre *Dérivation numérique*):

$$\begin{aligned} y'(t^{n+1}) &= \frac{y(t^{n+1}) - y(t^{n+1} - h)}{h} + \mathcal{O}(h) \\ \Rightarrow f(t^{n+1}, y(t^{n+1})) &= \frac{y(t^{n+1}) - y(t^n)}{h} + \mathcal{O}(h) \end{aligned}$$

La méthode d'**Euler régressif** est donnée par le schéma

$$\begin{cases} y^{[n+1]} &= y^{[n]} + hf(t^{n+1}, y^{[n+1]}), \quad \forall n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket \\ y^{[0]} &= y(t^0) \end{cases} \quad (8)$$

avec $y^{[n]} \approx y(t^n)$.

Ce schéma est **implicite**, car $y^{[n+1]}$ est défini implicitement en fonction de $y^{[n]}$. Il faut donc résoudre à chaque pas de temps une équation non-linéaire en utilisant des méthodes de point fixe par exemple.

Exercice

On veut résoudre numériquement le problème (\mathcal{P}) suivant : trouver y telle que

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} y'(t) = \cos(t) + 1, \quad \forall t \in [0, 4\pi] \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

dont la solution exacte est $y(t) = \sin(t) + t$.

On rappelle le schéma d'Euler progressif pour la résolution d'un problème de Cauchy

$$(\mathcal{S}) \quad \begin{cases} y^{[n+1]} = y^{[n]} + hf(t^n, y^{[n]}), \\ y^{[0]} \text{ donné.} \end{cases}$$

avec $(t^n)_{n=0}^N$ discrétisation régulière de l'intervalle $[0, 4\pi]$ avec N pas de discrétisation.

Q. 1

Expliquer en détail comment utiliser le schéma d'Euler progressif pour résoudre le problème (\mathcal{P}) en précisant entre autres les données, les inconnues, les dimensions des variables, lien entre $y^{[n+1]}$ et la fonction y , ...

Q. 2

Soit a, b , $a < b$ deux réels. Ecrire une fonction **DisReg** retournant une discrétisation régulière de l'intervalle $[a; b]$ avec N pas de discrétisation.

Q. 3

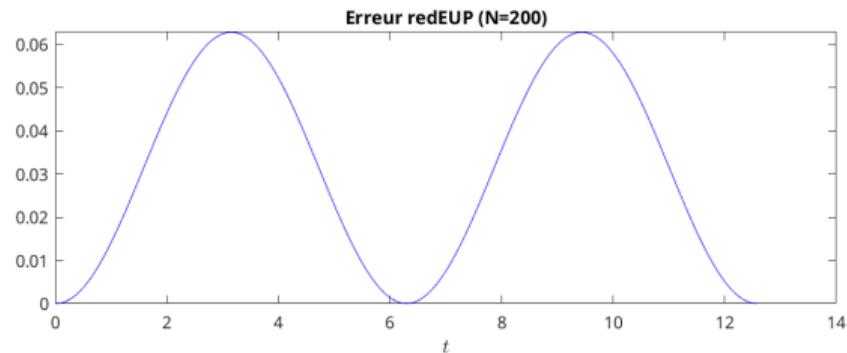
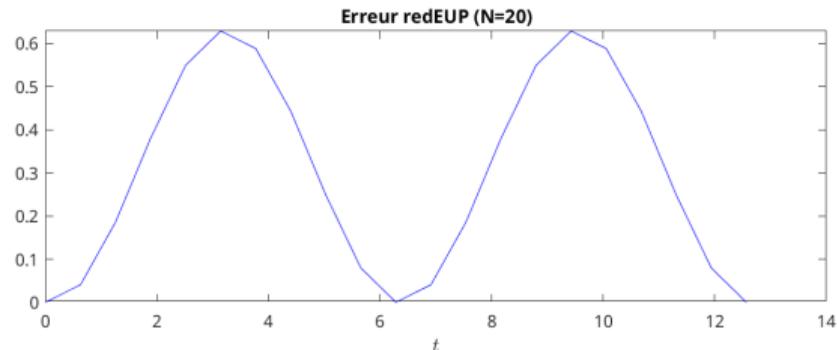
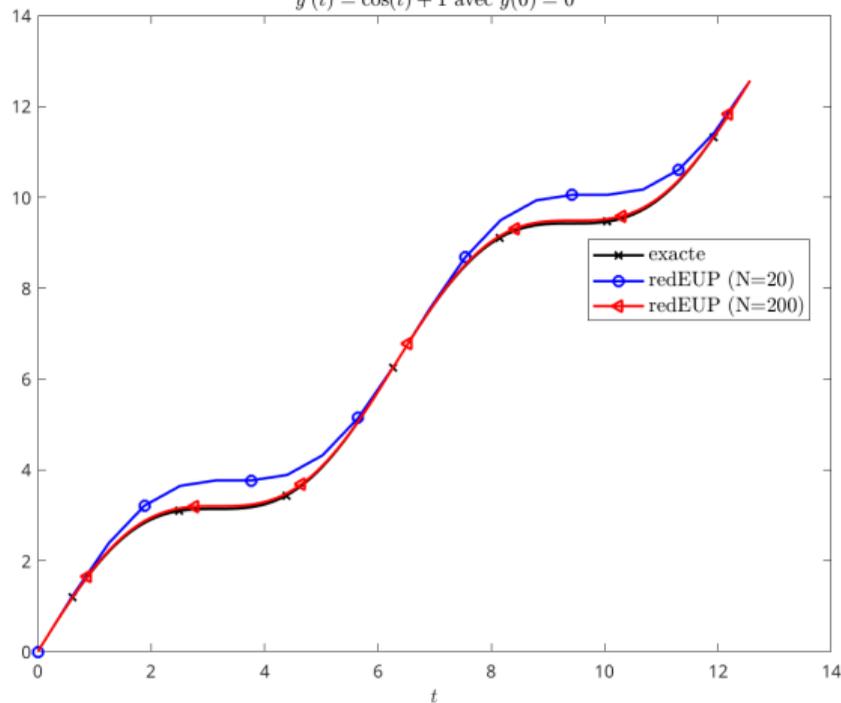
Ecrire une fonction **redEUPsca** retournant l'ensemble des couples $(t^n, y^{[n+1]})_{n=0}^N$ calculés par le schéma d'Euler progressif.

Q. 4

Ecrire un algorithme complet de résolution de (\mathcal{P}) par le schéma d'Euler progressif.

Résultats graphiques obtenus à partir des données de l'exercice

$$y'(t) = \cos(t) + 1 \text{ avec } y(0) = 0$$



- Comment obtenir ces figures avec Matlab/Octave?
- Que peut-on conjecturer sur la convergence du schéma?

```

1 function x=DisReg(a,b,N)
2 % Discretisation reguliere de l'intervalle [a,b]
3 % avec N pas de discretisation
4 % Donnees:
5 %   a,b : deux reels, a<b
6 %   N : nb de pas de discretisation
7 % Resultat:
8 %   x : tableau 1-par-(N+1) de reels
9   h=(b-a)/N;
10  x=zeros(1,N+1);
11  for i=1:N+1,x(i)=a+(i-1)*h;end
12 end

```

Listing: Fonction DisReg: fichier DisReg.m

```

1 function [t,Y]=redEUPsca(f,t0,T,y0,N)
2 % Resolution d'un probleme de Cauchy scalaire
3 % d'inconnue la fonction
4 %   y: [t0,t0.T] -> R
5 % par le schema d'Euler progressif
6 % Donnees:
7 %   f: [t0,t0.T] x R -> R
8 %   t0,T,y0 trois reels, T>0
9 %   N un entier non nul, nb de pas de discretisation
10 % Resultat:
11 %   t tableau de 1x(N+1) reels, discretisation
12 %   Y tableau 1x(N+1) reels, resultat tel que
13 %     Y(n) approximation de y(t(n))
14 %     avec n dans {1,...,N+1}.
15 assert(length(y0)==1,'Utiliser la fonction redEUPvec ...
16         pour pb Cauchy vectoriel');
17 t=DisReg(t0,t0+T,N);
18 h=T/N;
19 Y=zeros(1,N+1);
20 Y(1)=y0;
21 for n=1:N
22     Y(n+1)=Y(n)+h*f(t(n),Y(n));
23 end

```

Listing: Fonction redEUPsca: fichier redEUPsca.m

```

1 fCauchy=@(t,y) cos(t)+1;      % a modifier pour un autre probleme de Cauchy scalaire
2 solex=@(t) sin(t)+t;         % idem
3 t0=0;T=4*pi;N1=20;N2=10*N1; % idem
4 y0=solex(t0);
5
6 [t1,yEP1]=redEUPsca(fCauchy,t0,T,y0,N1);
7 [t2,yEP2]=redEUPsca(fCauchy,t0,T,y0,N2);
8
9 tex=DisReg(t0,t0+T,1000);
10 yex=solex(tex); % doit etre vectorisee!
11
12 figure(1)
13 plot(tex,yex,'kx-','linewidth',1.5,'Markerindices',50:150:1000)
14 hold on
15 plot(t1,yEP1,'bo-','linewidth',1.5,'Markerindices',1:3:N1)
16 plot(t2,yEP2,'r<-','linewidth',1.5,'Markerindices',15:30:N2)
17
18 legend('exacte', sprintf('redEUP (N=%d)',N1), sprintf('redEUP (N=%d)',N2),'interpreter','latex','...
19         fontsize',12,'Location','Best')
20 xlabel('$t$', 'interpreter','latex','fontsize',12)
21 title(sprintf("$y'(t)=\cos(t)+1$ avec $y(0)=%g$",y0),'interpreter','latex','fontsize',12)
22
23 figure(2)
24 subplot(2,1,1)
25 plot(t1,abs(yEP1-solex(t1)),'b')
26 xlabel('$t$', 'interpreter','latex','fontsize',12)
27 title(sprintf('Erreur redEUP (N=%d)',N1))
28
29 subplot(2,1,2)
30 plot(t2,abs(yEP2-solex(t2)),'b')
31 xlabel('$t$', 'interpreter','latex','fontsize',12)
32 title(['Erreur redEUP (N=',num2str(N2),')'])

```

Listing: programme Matlab associé à l'exercice avec représentations graphiques

- 1 Exemples d'E.D.O.
 - Chimie : réaction BZ
 - Météorologie : modèle de Lorentz (1963)
 - Mécanique : le pendule pesant
- 2 Définitions et résultats
- 3 Problème de Cauchy
- 4 Différences finies $m = 1$
- 5 Différences finies $m > 1$**
- 6 ... suite au prochain épisode

On veut résoudre le problème de Cauchy **vectoriel** :

$$(\mathcal{PC}) \quad \begin{cases} \mathbf{y}'(t) &= \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)), \quad \forall t \in [t^0, t^0 + T] \\ \mathbf{y}(t^0) &= \mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^m. \end{cases}$$

avec $f : [t^0, t^0 + T] \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $m \geq 2$.

La méthode d'**Euler progressive** est donnée par le schéma

$$\begin{cases} \mathbf{y}^{[n+1]} \stackrel{\mathbb{R}^m}{=} \mathbf{y}^{[n]} + h\mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]}), \quad \forall n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket \\ \mathbf{y}^{[0]} \stackrel{\mathbb{R}^m}{=} \mathbf{y}(t^0) \end{cases} \quad (9)$$

Ce schéma est **explicite**, car il permet le calcul direct de $\mathbf{y}^{[n+1]}$ en fonction de $\mathbf{y}^{[n]}$.

On veut résoudre le problème de Cauchy **vectoriel** :

$$(\mathcal{PC}) \quad \begin{cases} \mathbf{y}'(t) &= \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)), \quad \forall t \in [t^0, t^0 + T] \\ \mathbf{y}(t^0) &= \mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^m. \end{cases}$$

avec $f : [t^0, t^0 + T] \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $m \geq 2$.

La méthode d'**Euler régressive** est donnée par le schéma

$$\begin{cases} \mathbf{y}^{[n+1]} \stackrel{\mathbb{R}^m}{=} \mathbf{y}^{[n]} + h\mathbf{f}(t^{n+1}, \mathbf{y}^{[n+1]}), & \forall n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket \\ \mathbf{y}^{[0]} \stackrel{\mathbb{R}^m}{=} \mathbf{y}(t^0) \end{cases} \quad (10)$$

Ce schéma est **implicite**, car $\mathbf{y}^{[n+1]}$ est défini implicitement en fonction de $\mathbf{y}^{[n]}$.

Exercice

Soit le problème de Cauchy **vectoriel**

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)), & \forall t \in [t^0, t^0 + T], \\ \mathbf{y}(t^0) = \mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^m, \end{cases}$$

avec $\mathbf{f} : [t^0, t^0 + T] \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$. On souhaite écrire une fonction algorithmique **redEUPVec** permettant de résoudre ce problème de Cauchy (vectoriel) par le schéma **vectoriel** explicite d'Euler progressif

$$\begin{cases} \mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + h\mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]}), & \forall n \in [0, N-1] \\ \mathbf{y}^{[0]} = \mathbf{y}_0 \end{cases}$$

avec $(t^n)_{n=0}^N$ la discrétisation régulière de $[t^0, t^0 + T]$ avec N pas de discrétisation et $\mathbf{y}^{[n]} = \begin{pmatrix} y_1^{[n]} \\ \vdots \\ y_m^{[n]} \end{pmatrix}$ et $\mathbf{y}^{[n]} \approx \mathbf{y}(t^n)$. Cette fonction devra retourner l'ensemble des t^n et des $\mathbf{y}^{[n]}$ pour $n \in [0, N]$.

Q. 1

1. Rappeler précisément les données du problème de Cauchy **vectoriel**.
2. Quelles sont les données de la fonction algorithmique **redEUPVec** en précisant le type et la dimension pour chacune?
3. Quelles sont les sorties/résultats de la fonction algorithmique **redEUPVec** en précisant le type et la dimension pour chacun?

On rappelle l'écriture simplifiée d'accès aux colonnes d'une matrice décrit en section ??

Algorithmique		
fonction	version simplifiée	Description mathématique
$\mathbf{u} \leftarrow \text{getMatCol}(\mathbb{A}, j)$	$\mathbf{u} \leftarrow \mathbb{A}(:, j)$	$\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ est déterminé par $u_i = \mathbb{A}_{i,j}, \forall i \in [1, m]$
$\mathbb{A} \leftarrow \text{setMatCol}(\mathbb{A}, \mathbf{u}, j)$	$\mathbb{A}(:, j) \leftarrow \mathbf{u}$	la colonne j de \mathbb{A} est remplacée par $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ et on a $\mathbb{A}_{i,j} = u_i, \forall i \in [1, m]$.

Table: Accès algorithmique aux colonnes d'une matrice $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ décrit en section ??

Q. 2

Écrire la fonction algorithmique **redEUPVec** permettant de résoudre ce problème de Cauchy (vectoriel) par le schéma explicite d'Euler progressif. On utilisera l'écriture algorithmique simplifiée d'accès aux éléments d'une matrice (voir Table 1).

Q. 3

Écrire la fonction algorithmique **redEUPVecfun** permettant de résoudre ce problème de Cauchy (vectoriel) par le schéma explicite d'Euler progressif. On utilisera l'écriture algorithmique avec fonctions pour l'accès aux éléments d'une matrice (voir Table 1).

Exercice

Soit l'équation différentielle ordinaire linéaire du troisième ordre avec conditions initiales données par

$$(1 + t + t^2)y^{(3)}(t) + (3 + 6t)y^{(2)}(t) + 6y^{(1)}(t) = 6t, \quad \forall t \in [0, T],$$

$$y(0) = \alpha, \quad y^{(1)}(0) = \beta, \quad y^{(2)}(0) = \gamma.$$

Ici $y^{(k)}$ note la dérivée k -ième de y .

Pour cette EDO, il existe une unique solution donnée par

$$y(t) = \frac{t^4 + 2At^2 + 4Bt + 4C}{4(t^2 + t + 1)}$$

avec $(A, B, C) \in \mathbb{R}^3$ vérifiant

$$C = \alpha, \quad B - C = \beta \quad \text{et} \quad A - 2B = \gamma.$$

On a aussi

$$y^{(1)}(t) = \frac{t^3 + At + B}{t^2 + t + 1} - \frac{(t^4 + 2At^2 + 4Bt + 4C)(2t + 1)}{4(t^2 + t + 1)^2}$$

$$y^{(2)}(t) = \frac{3t^2 + A}{t^2 + t + 1} - \frac{2(t^3 + At + B)(2t + 1)}{(t^2 + t + 1)^2} + \frac{(t^4 + 2At^2 + 4Bt + 4C)(2t + 1)^2}{2(t^2 + t + 1)^3} - \frac{t^4 + 2At^2 + 4Bt + 4C}{2(t^2 + t + 1)^2}.$$

Q. 1

Déterminer le problème de Cauchy vectoriel associé à cette EDO

Dans la suite, on prendra $T = 10$, $\alpha = 6$, $\beta = -5$ et $\gamma = -2$.

Q. 2

Écrire un programme permettant de résoudre numériquement le problème de Cauchy associé à cette EDO à l'aide de la fonction algorithmique $[t, Y] \leftarrow \text{redEUPvec}(f, t0, T, Y0, N)$ (voir Exercice précédent).

On suppose que notre langage algorithmique dispose d'une fonction graphique $\text{plot}(X, Y)$ reliant par des segments les points successifs

$$(X(1), Y(1)), (X(2), Y(2)), \dots, (X(\text{end}), Y(\text{end}))$$

les tableaux X et Y ayant même longueur et correspondent respectivement aux tableaux des abscisses et des ordonnées.

On pourra utiliser la version simplifiée du langage algorithmique.

Q. 3

Donner les commandes permettant, après avoir utilisé le programme algorithmique précédent, de représenter graphiquement les approximations obtenues par le schéma, de

$$(y(t^n))_{n=0}^N, \quad (y^{(1)}(t^n))_{n=0}^N \quad \text{et} \quad (y^{(2)}(t^n))_{n=0}^N$$

Q. 4

Écrire un programme algorithmique permettant de représenter graphiquement les solutions exactes aux points de discrétisation, c'est à dire

$$(y(t^n))_{n=0}^N, \quad (y^{(1)}(t^n))_{n=0}^N \quad \text{et} \quad (y^{(2)}(t^n))_{n=0}^N$$

Q. 5

Écrire un programme algorithmique permettant de représenter graphiquement les erreurs numériques commises en valeurs absolues par le schéma pour les approximations de

$$(y(t^n))_{n=0}^N, \quad (y^{(1)}(t^n))_{n=0}^N \quad \text{et} \quad (y^{(2)}(t^n))_{n=0}^N$$

- 1 Exemples d'E.D.O.
 - Chimie : réaction BZ
 - Météorologie : modèle de Lorentz (1963)
 - Mécanique : le pendule pesant
- 2 Définitions et résultats
- 3 Problème de Cauchy
- 4 Différences finies $m = 1$
- 5 Différences finies $m > 1$
- 6 ... suite au prochain épisode