

# Analyse Numérique I\*

Sup'Galilée, Ingénieurs Energétique, 1ère année

François Cuvelier

Laboratoire d'Analyse Géométrie et Applications  
Institut Galilée  
Université Paris XIII.

2025/03/04

- Chapitre I : Algorithmique numérique
- Chapitre II : Dérivation numérique
- Chapitre III : Résolution numérique des E.D.O.**
- Chapitre IV : Résolution numérique des E.D.P.

- 1 Exemples d'E.D.O.
- 2 Définitions et résultats
- 3 Problème de Cauchy
- 4 Différences finies  $m = 1$
- 5 Différences finies  $m > 1$
- 6 Méthodes à un pas**
  - Méthodes de Runge-Kutta
- 7 Méthodes à pas multiples
  - Résultats théoriques
  - Méthodes d'Adams-Bashforth
  - Méthodes d'Adams-Moulton
- 8 Méthodes de prédiction-correction
- 9 Application

 **Définition : *problème de Cauchy***


Soit  $f$  l'application continue donnée par

$$\begin{aligned} f &: [t^0, t^0 + T] \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m \\ (t, \mathbf{y}) &\longmapsto \mathbf{f}(t, \mathbf{y}) \end{aligned}$$

avec  $T \in ]0, +\infty[$ . Le **problème de Cauchy** consiste à déterminer une fonction  $\mathbf{y}$  définie par

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &: [t^0, t^0 + T] \longrightarrow \mathbb{R}^m \\ t &\longmapsto \mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_m(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

continue et dérivable, telle que

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)), \quad \forall t \in [t^0, t^0 + T] \quad (1)$$

$$\mathbf{y}(t^0) = \mathbf{y}^{[0]} \in \mathbb{R}^m. \quad (2)$$

Soit  $\mathbf{y}$  la solution d'un problème de Cauchy (vectoriel) et  $(t^n)_{n=0}^N$  la discrétisation régulière de l'intervalle  $[t^0, t^0 + T]$ .

### ♥ Définition 6.1 : Méthodes à un pas

Les méthodes à un pas utilisent la formule générale:

$$\mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + h\Phi(t^n, \mathbf{y}^{[n]}, h) \quad (3)$$

Le schéma (3) converge sur l'intervalle  $[t^0, t^0 + T]$  si, pour la suite des  $\mathbf{y}^{[n]}$  calculés, l'écart maximum avec la solution exacte diminue quand le pas  $h$  diminue:

$$\lim_{h=\frac{T}{N} \rightarrow 0} \max_{n \in \{0, \dots, N\}} \|\mathbf{y}^{[n]} - \mathbf{y}(t^n)\|_{\infty} = 0$$

Pour la méthode d'Euler progressif  $\Phi(t, \mathbf{y}, h) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ .

## ♥ Définition 6.2 : *Consistance*

Le schéma de calcul (3) est consistant avec le problème de Cauchy (1)-(2) si

$$\lim_{h=\frac{T}{N} \rightarrow 0} \max_n \left\| \frac{\mathbf{y}(t^{n+1}) - \mathbf{y}(t^n)}{h} - \Phi(t^n, \mathbf{y}(t^n), h) \right\|_{\infty} = 0$$

Cela signifie que le schéma doit être une approximation vraisemblable, bien construite.

## Théorème 6.1

Le schéma (3) est consistant avec le problème de Cauchy (1)-(2) si  $\Phi(t, \mathbf{y}, h) = f(t, \mathbf{y})$ .

### ♥ Définition 6.3 : *Stabilité*

La méthode est stable si une petite perturbation sur  $\mathbf{y}^{[0]}$  ou  $\Phi$  n'entraîne qu'une petite perturbation sur la solution approchée, et cela quel que soit le pas  $h$ .

### Théorème 6.2

Si  $\Phi(t, \mathbf{y}, h)$  vérifie la condition de Lipschitz en  $\mathbf{y}$  alors la méthode est stable.

### Théorème 6.3

Si la méthode est **stable et consistante**, alors elle **converge** pour n'importe quelle valeur initiale.

### Définition 6.4 : *Ordre d'un schéma*

Le schéma (3) est d'ordre  $p$  si la solution  $\mathbf{y}$  du problème de Cauchy (1)-(2) vérifie

$$\max_n \left\| \frac{\mathbf{y}(t^{n+1}) - \mathbf{y}(t^n)}{h} - \Phi(t^n, \mathbf{y}(t^n), h) \right\|_{\infty} = \mathcal{O}(h^p)$$



### Lemme 6.1

Soient  $\mathbf{y}$  la solution du problème de Cauchy (1)-(2). et  $(\mathbf{y}^{[n]})_{n \in \llbracket 0, N \rrbracket}$  donnés par un schéma à un pas (3) d'ordre  $p$  avec  $\mathbf{y}^{[0]} = \mathbf{y}(t^0)$ . On a alors

$$\max_{n \in \llbracket 0, N \rrbracket} \left\| \mathbf{y}(t^n) - \mathbf{y}^{[n]} \right\|_{\infty} = \mathcal{O}(h^p) \quad (4)$$



## Proposition

Le schéma d'Euler progressif est une méthode à un pas d'ordre 1.

$$y'(t) = \cos(t) + 1, \quad t \in [0, 4\pi] \text{ avec } y(0) = 0 \quad (\text{sol.ex. } y(t) = \sin(t) + t)$$

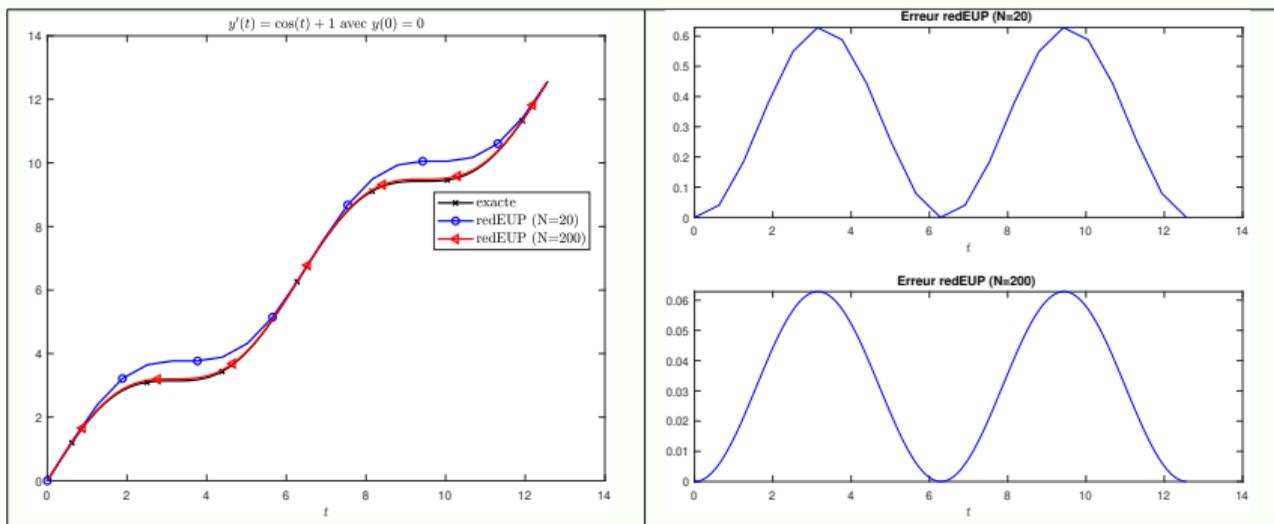


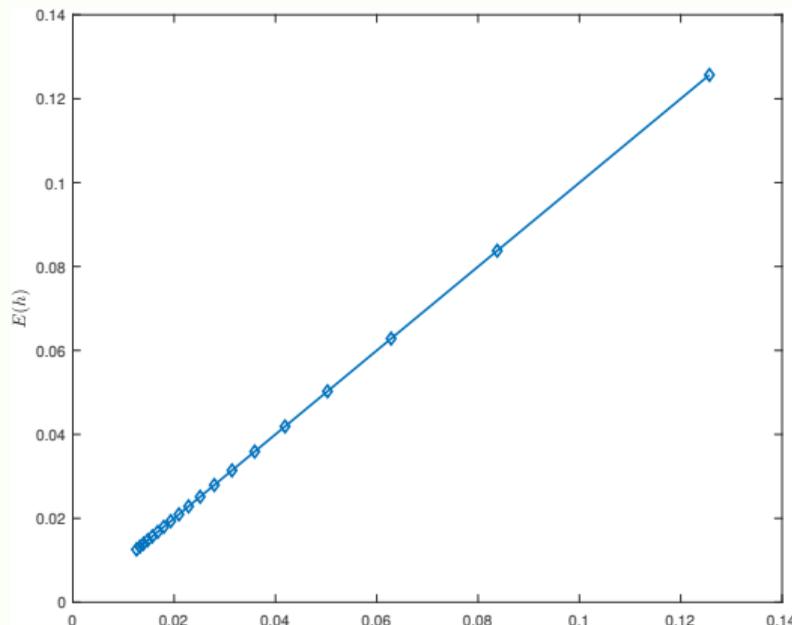
Figure: Méthode d'Euler progressive : vérification numérique de l'ordre



## Proposition

Le schéma d'Euler progressif est une méthode à un pas d'ordre 1.

$$y'(t) = \cos(t) + 1, \quad t \in [0, 4\pi] \text{ avec } y(0) = 0 \quad (\text{sol.ex. } y(t) = \sin(t) + t)$$



# Méthodes de Runge-Kutta



(a) *Carle Runge* 1856–1927, mathématicien et physicien allemand



(b) *Martin Wilhelm Kutta* 1867–1944, Mathématicien allemand



(c) *John C. Butcher* 1933, Mathématicien appliqué néozélandais

L'idée fondamentale des méthodes de Runge-Kutta est d'intégrer l'équation  $\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t))$  sur  $[t^n, t^{n+1}]$  et de calculer:

$$\mathbf{y}(t^{n+1}) = \mathbf{y}(t^n) + \int_{t^n}^{t^{n+1}} \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)) dt,$$

en utilisant une formule d'intégration numérique à  $q$  points intermédiaires pour évaluer l'intégrale.

# Méthodes de Runge-Kutta

Ce sont des méthodes à un pas :

$$\mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + h\Phi(t^n, \mathbf{y}^{[n]}, h)$$

avec

$$\Phi(t, \mathbf{y}, h) = \sum_{i=1}^q c_i \mathbf{k}^{[i]}(t, \mathbf{y}, h)$$

et

$$\mathbf{k}^{[i]}(t, \mathbf{y}, h) = \mathbf{f} \left( t + ha_i, \mathbf{y} + h \sum_{j=1}^q b_{i,j} \mathbf{k}^{[j]}(t, \mathbf{y}, h) \right), \quad 1 \leq i \leq q$$

que l'on peut représenter sous la forme d'un tableau dit **tableau de Butcher** :

$$\begin{array}{c|c} \mathbf{a} & \mathbb{B} \\ \hline & \mathbf{c}^t \end{array} \quad (5)$$

avec  $\mathbb{B} = (b_{i,j})_{i,j \in \llbracket 1, q \rrbracket} \in \mathcal{M}q, q(\mathbb{R})$ ,  $\mathbf{a} = (a_i)_{i \in \llbracket 1, q \rrbracket} \in \mathbb{R}^q$  et  $\mathbf{c} = (c_i)_{i \in \llbracket 1, q \rrbracket} \in \mathbb{R}^q$



### Proposition 6.1 : (admis)

- 1 Les méthodes de Runge-Kutta explicites sont stables si  $f$  est contractante en  $y$ .
- 2 Une méthode de Runge-Kutta est d'ordre 0 si

$$a_i = \sum_{j=1}^q b_{ij}.$$

- 3 Une méthode de Runge-Kutta est d'ordre 1 (et donc consistante) si elle est d'ordre 0 et si

$$\sum_{i=1}^q c_i = 1.$$

- 4 Une méthode de Runge-Kutta est d'ordre 2 si elle est d'ordre 1 et si

$$\sum_{i=1}^q c_i a_i = 1/2.$$

- 5 Une méthode de Runge-Kutta est explicite si la matrice  $\mathbb{B}$  est triangulaire inférieure à diagonale nulle :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, q \rrbracket, j \geq i, \quad b_{ij} = 0.$$

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2\alpha} & \frac{1}{2\alpha} & 0 \\ \hline & 1-\alpha & \alpha \end{array} \quad (6)$$

$$\Phi(t, \mathbf{y}, h) = (1 - \alpha)\mathbf{f}(t, \mathbf{y}) + \alpha\mathbf{f}\left(t + \frac{h}{2\alpha}, \mathbf{y} + \frac{h}{2\alpha}\mathbf{f}(t, \mathbf{y})\right)$$

- $\alpha = \frac{1}{2}$ , **méthode de Heun** :

$$\mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{2}\mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]}) + \frac{h}{2}\mathbf{f}\left(t^{n+1}, \mathbf{y}^{[n]} + h\mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]})\right).$$

- $\alpha = 1$ , **méthode d'Euler modifiée** ou **méthode du point milieu**:

$$\mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + h\mathbf{f}\left(t^n + \frac{h}{2}, \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{2}\mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]})\right).$$

## Exercice 1

la **méthode de Heun** est donnée par

$$\mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{2}\mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]}) + \frac{h}{2}\mathbf{f}\left(t^{n+1}, \mathbf{y}^{[n]} + h\mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]})\right).$$

Q. 1

*Ecrire la fonction algorithmique **REDHeunVec** permettant de résoudre un problème de Cauchy vectoriel par la méthode de Heun en utilisant au plus  $2N$  évaluation de  $\mathbf{f}$ .*

Q. 2

*Ecrire un programme algorithmique permettant de retrouver numériquement l'ordre de cette méthode.*

$$y'(t) = \cos(t) + 1, \quad t \in [0, 4\pi] \text{ avec } y(0) = 0 \quad (\text{sol.ex. } y(t) = \sin(t) + t)$$

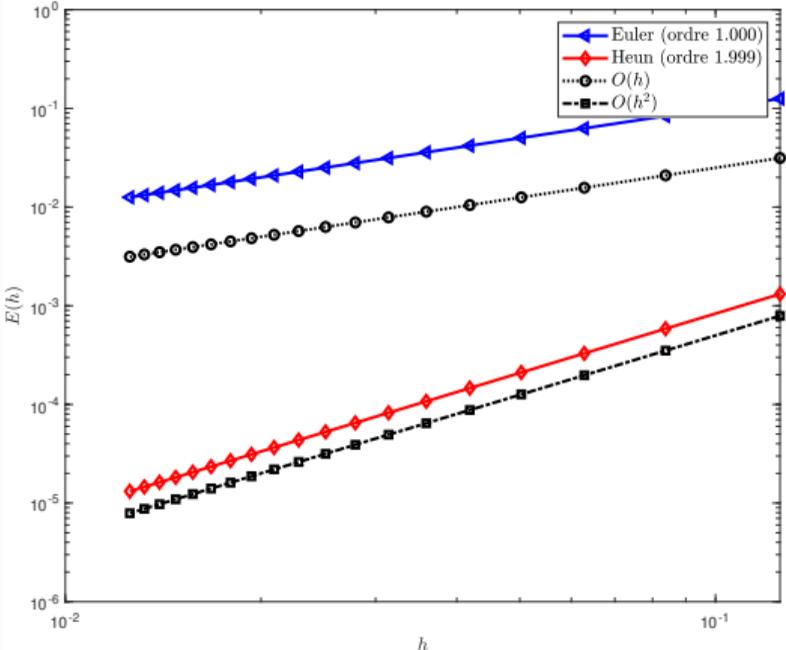


Figure: Méthode de Heun : vérification numérique de l'ordre

# Runge-Kutta d'ordre 4

La méthode explicite la plus utilisée est donnée par le tableau de Buchler suivant

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & 1/6 & 2/6 & 2/6 & 1/6 \end{array} \quad (7)$$

Ce qui donne le schéma explicite de Runge-Kutta d'ordre 4 :

$$\begin{aligned} k_1^{[n]} &= \mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]}) \\ k_2^{[n]} &= \mathbf{f}\left(t^n + \frac{h}{2}, \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{2}k_1^{[n]}\right) \\ k_3^{[n]} &= \mathbf{f}\left(t^n + \frac{h}{2}, \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{2}k_2^{[n]}\right) \\ k_4^{[n]} &= \mathbf{f}\left(t^n + h, \mathbf{y}^{[n]} + hk_3^{[n]}\right) \\ \mathbf{y}^{[n+1]} &= \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{6}(k_1^{[n]} + 2k_2^{[n]} + 2k_3^{[n]} + k_4^{[n]}). \end{aligned} \quad (8)$$

## Exercice 2

la **méthode de Runge-Kutta d'ordre 4** est donnée par

$$\begin{aligned}k_1^{[n]} &= f(t^n, \mathbf{y}^{[n]}) \\k_2^{[n]} &= f\left(t^n + \frac{h}{2}, \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{2}k_1^{[n]}\right) \\k_3^{[n]} &= f\left(t^n + \frac{h}{2}, \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{2}k_2^{[n]}\right) \\k_4^{[n]} &= f\left(t^n + h, \mathbf{y}^{[n]} + hk_3^{[n]}\right) \\ \hline \mathbf{y}^{[n+1]} &= \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{6}(k_1^{[n]} + 2k_2^{[n]} + 2k_3^{[n]} + k_4^{[n]}).\end{aligned}$$

Q. 1

Écrire une fonction algorithmique **REDRK4Vec** permettant de résoudre un problème de Cauchy vectoriel par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4.

Q. 2

Écrire un programme algorithmique permettant de retrouver numériquement l'ordre de cette méthode.

$$y'(t) = \cos(t) + 1, \quad t \in [0, 4\pi] \text{ avec } y(0) = 0 \quad (\text{sol.ex. } y(t) = \sin(t) + t)$$

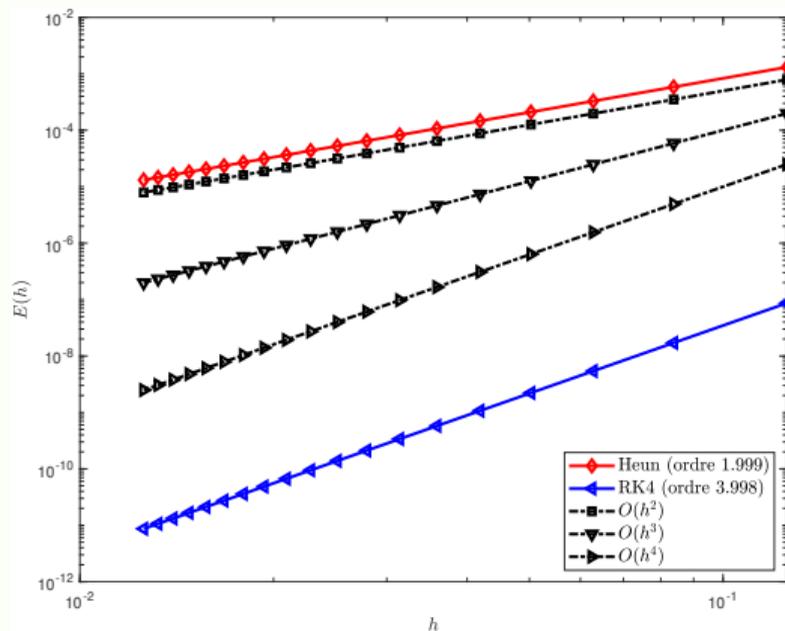


Figure: Méthode RK4 : vérification numérique de l'ordre

mais en prenant des  $h$  de plus en plus petits ...

$$y'(t) = \cos(t) + 1, \quad t \in [0, 4\pi] \text{ avec } y(0) = 0 \quad (\text{sol.ex. } y(t) = \sin(t) + t)$$

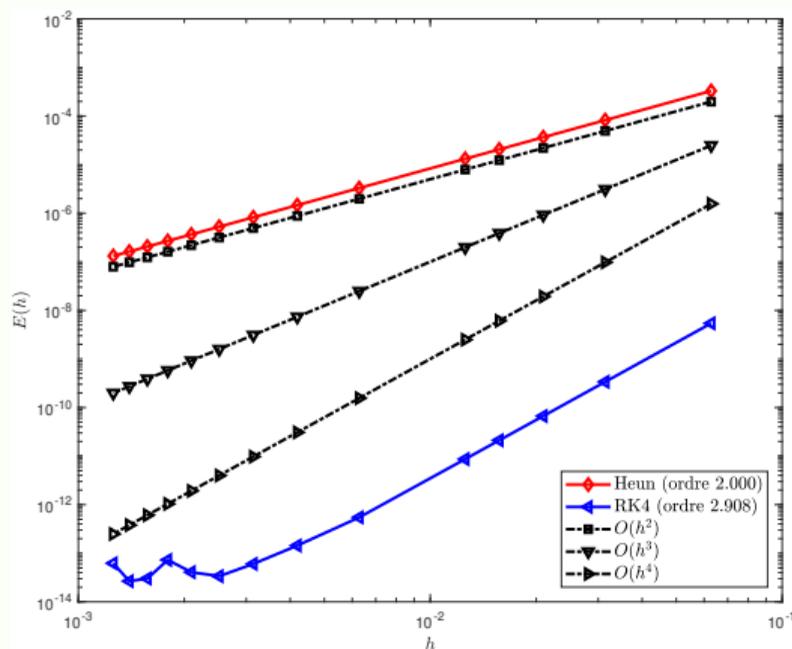


Figure: Méthode RK4 progressive : vérification numérique de l'ordre

- 1 Exemples d'E.D.O.
- 2 Définitions et résultats
- 3 Problème de Cauchy
- 4 Différences finies  $m = 1$
- 5 Différences finies  $m > 1$
- 6 Méthodes à un pas
  - Méthodes de Runge-Kutta
- 7 Méthodes à pas multiples**
  - Résultats théoriques
  - Méthodes d'Adams-Bashforth
  - Méthodes d'Adams-Moulton
- 8 Méthodes de prédiction-correction
- 9 Application

Exemple d'une méthode à deux pas :

$$\mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n-1]} + 2h\mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]}). \quad (9)$$

Cette méthode est d'ordre 2.

### ♥ Définition 7.1 : Méthodes à pas multiples

Les méthodes à pas multiples s'écrivent sous la forme générale:

$$\sum_{i=0}^k \alpha_i \mathbf{y}^{[n+i]} = h \sum_{i=0}^k \beta_i \mathbf{f}(t^{n+i}, \mathbf{y}^{[n+i]}) \quad (10)$$

où  $k$  est le nombre de pas,  $\alpha_k \neq 0$  et  $|\alpha_0| + |\beta_0| > 0$ .

Si  $\beta_k = 0$  le schéma est **explicite**, sinon il est **implicite**.

## ♥ Définition 7.2 : *ordre*

Soit  $\mathbf{y}$  la solution d'un problème de Cauchy (1)-(2) et  $\mathbf{y}^{[n+k]}$  le terme obtenu par le schéma (10) en prenant  $\mathbf{y}^{[n+i]} = \mathbf{y}(t^{n+i})$ ,  $\forall i \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$ . Alors, l'erreur locale est

$$\tau(n+k) = \left\| \mathbf{y}(t^{n+k}) - \mathbf{y}^{[n+k]} \right\|_{\infty}.$$

Le schéma (10) est alors d'**ordre**  $p$  si

$$\tau(n+k) = \mathcal{O}(h^{p+1}).$$

## Théorème 7.1 : *ordre schémas à pas multiples (admis)*

Un schéma à pas multiples de type (10) est d'ordre  $p$  si et seulement si

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^k \alpha_i &= 0, \\ \sum_{i=0}^k \alpha_i i^q &= q \sum_{i=0}^k \beta_i i^{q-1}, \quad \forall q \in \llbracket 1, p \rrbracket. \end{aligned}$$

### Théorème 7.2 : *stabilité schémas à pas multiples (admis)*

Soit une méthode à pas multiples donnée par (10). On note  $P$  le polynôme défini par

$$P(\lambda) = \sum_{i=0}^k \alpha_i \lambda^i.$$

La méthode à pas multiples est **stable**, si

- ① toutes les racines de  $P$  sont de module inférieur ou égal à 1,
- ② une racine de module égal à 1 est une racine simple de  $P$ .

### Théorème 7.3 : *convergence (admis)*

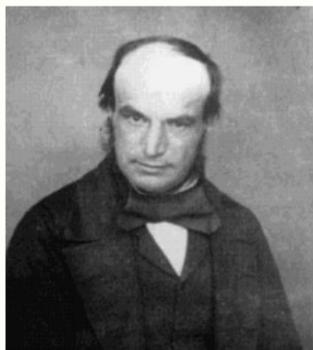
On suppose que les  $k$  valeurs initiales vérifient,

$$\|\mathbf{y}(t^i) - \mathbf{y}^{[i]}\| \leq C_0 h^p, \quad \forall i \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket.$$

Si le schéma (10) est **stable et d'ordre**  $p$ , alors il est **convergent** d'ordre  $p$  :

$$\|\mathbf{y}(t^n) - \mathbf{y}^{[n]}\| \leq Ch^p, \quad \forall n \in \llbracket 0, N \rrbracket.$$

# Exemples de schémas à pas multiples



*John Couch Adams* 1819-1892,  
mathématicien et astronome  
britannique



*Francis Bashforth* 1819-1912,  
mathématicien appliqué britannique



(a) *Forest Ray Moulton* 1872-1952,  
mathématicien et astronome  
américain

- Méthodes **explicites** d'Adams-Bashforth
- Méthodes **implicites** d'Adams-Moulton

On note en abrégé  $\mathbf{f}^{[n]} = \mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]})$ . Voici trois schémas :

- Ordre 2 à 2 pas :

$$\mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{2} \left( 3\mathbf{f}^{[n]} - \mathbf{f}^{[n-1]} \right).$$

- Ordre 3 à 3 pas :

$$\mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{12} \left( 23\mathbf{f}^{[n]} - 16\mathbf{f}^{[n-1]} + 5\mathbf{f}^{[n-2]} \right).$$

- Ordre 4 à 4 pas :

$$\mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{24} \left( 55\mathbf{f}^{[n]} - 59\mathbf{f}^{[n-1]} + 37\mathbf{f}^{[n-2]} - 9\mathbf{f}^{[n-3]} \right).$$

### Exercice 3

La **méthode de Adam-Bashforth d'ordre 4** explicite est donnée par

$$\mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{24} \left( 55\mathbf{f}^{[n]} - 59\mathbf{f}^{[n-1]} + 37\mathbf{f}^{[n-2]} - 9\mathbf{f}^{[n-3]} \right). \quad (1)$$

avec  $\mathbf{f}^{[n]} = \mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]})$ .

Q. 1

*Ecrire la fonction algorithmique REDAB4Vec permettant de résoudre un problème de Cauchy vectoriel par cette méthode.*

☞ Initialisation d'un schéma à pas multiples avec un schéma à un pas du **même ordre au moins**

On note en abrégé  $\mathbf{f}^{[n]} = \mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]})$ . Voici trois schémas :

- Ordre 2 à 1 pas :

$$\mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{2} \left( \mathbf{f}^{[n+1]} + \mathbf{f}^{[n]} \right).$$

- Ordre 3 à 2 pas :

$$\mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{12} \left( 5\mathbf{f}^{[n+1]} + 8\mathbf{f}^{[n]} - \mathbf{f}^{[n-1]} \right).$$

- Ordre 4 à 3 pas :

$$\mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{24} \left( 9\mathbf{f}^{[n+1]} + 19\mathbf{f}^{[n]} - 5\mathbf{f}^{[n-1]} + \mathbf{f}^{[n-2]} \right).$$

- 1 Exemples d'E.D.O.
- 2 Définitions et résultats
- 3 Problème de Cauchy
- 4 Différences finies  $m = 1$
- 5 Différences finies  $m > 1$
- 6 Méthodes à un pas
  - Méthodes de Runge-Kutta
- 7 Méthodes à pas multiples
  - Résultats théoriques
  - Méthodes d'Adams-Bashforth
  - Méthodes d'Adams-Moulton
- 8 Méthodes de prédiction-correction**
- 9 Application

Une méthode de prédiction-correction procède en deux étapes à chacune des itérations :

- **Prédiction** : on calcule une approximation de  $\mathbf{y}(t_{n+1})$  notée  $\widehat{\mathbf{y}}^{[n+1]}$  à l'aide du **schéma explicite**
- **Correction** : on utilise le schéma implicite dans lequel les fonctions  $\mathbf{f}$  utilisant  $\mathbf{y}^{[n+1]}$  sont remplacées par les fonctions  $\mathbf{f}$  utilisant  $\widehat{\mathbf{y}}^{[n+1]}$ .

# Exemple

Méthode d'Euler **explicite** pour **prédicteur** et méthode **implicite** des trapèzes comme **correcteur**.

**Euler explicite :**  $\mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + h\mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]})$

**Trapèze implicite :**  $\mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{2}(\mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]}) + \mathbf{f}(t^{n+1}, \mathbf{y}^{[n+1]}))$

On obtient :

$$\begin{cases} \widehat{\mathbf{y}^{[n+1]}} &= \mathbf{y}^{[n]} + h\mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]}) & \text{Prédiction} \\ \mathbf{y}^{[n+1]} &= \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{2}(\mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]}) + \mathbf{f}(t^{n+1}, \widehat{\mathbf{y}^{[n+1]}})) & \text{Correction} \end{cases}$$

#### Exercice 4

On pose  $\mathbf{f}^{[n]} = \mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]})$ . La **méthode de Adams-Bashforth d'ordre 4** explicite est donnée par

$$\mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{24} \left( 55\mathbf{f}^{[n]} - 59\mathbf{f}^{[n-1]} + 37\mathbf{f}^{[n-2]} - 9\mathbf{f}^{[n-3]} \right)$$

et la **méthode de Adams-Moulton d'ordre 4** implicite par

$$\mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{24} \left( 9\mathbf{f}^{[n+1]} + 19\mathbf{f}^{[n]} - 5\mathbf{f}^{[n-1]} + \mathbf{f}^{[n-2]} \right)$$

avec  $\mathbf{f}^{[n]} = \mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]})$ .

Q. 1

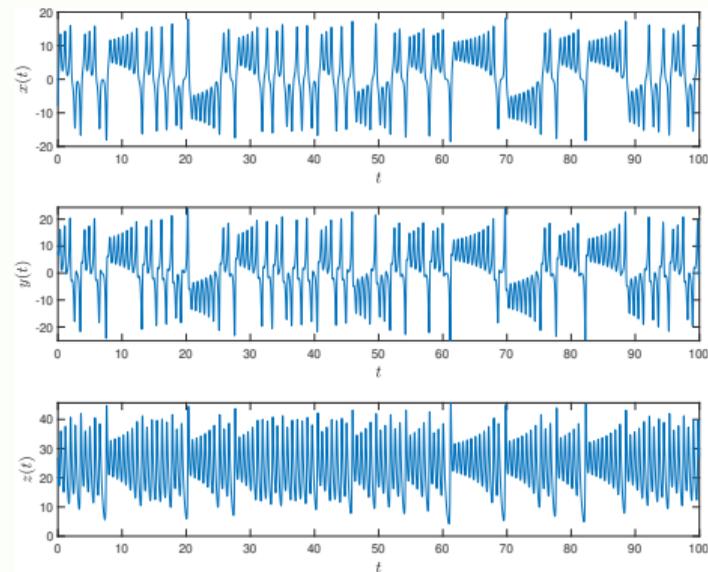
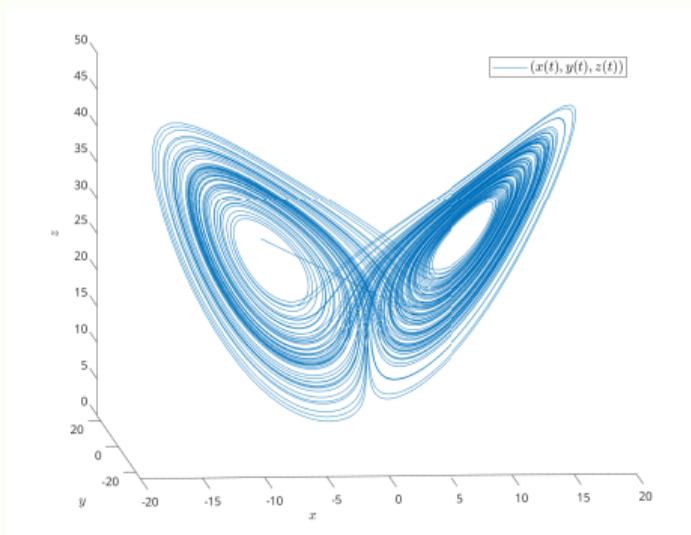
*Ecrire la fonction algorithmique **REDPC4Vec** permettant de résoudre un problème de Cauchy (vectoriel) par une méthode de prédiction-correction utilisant ces deux schémas. On minimisera le nombre d'appel à la fonction  $\mathbf{f}$  dans la boucle principale.*

- 1 Exemples d'E.D.O.
- 2 Définitions et résultats
- 3 Problème de Cauchy
- 4 Différences finies  $m = 1$
- 5 Différences finies  $m > 1$
- 6 Méthodes à un pas
  - Méthodes de Runge-Kutta
- 7 Méthodes à pas multiples
  - Résultats théoriques
  - Méthodes d'Adams-Bashforth
  - Méthodes d'Adams-Moulton
- 8 Méthodes de prédiction-correction
- 9 Application

# Application : modèle de Lorentz

$$\begin{cases} x'(t) &= -\sigma x(t) + \sigma y(t) \\ y'(t) &= -x(t)z(t) + \rho x(t) - y(t) \\ z'(t) &= x(t)y(t) - \beta z(t) \end{cases}$$

$$\sigma = 10, \rho = 28, \beta = 8/3 - x(0) = -8, y(0) = 8, z(0) = \rho - 1.$$



👉 Comment reproduire ces graphiques avec Matlab/Octave?

Le problème de Cauchy correspondant au modèle de Lorentz :

Trouver  $\mathbf{y} : [t^0, t^0 + T] \rightarrow \mathbb{R}^3$  solution de

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)), \quad \forall t \in [t^0, t^0 + T]$$

$$\mathbf{y}(t^0) = \mathbf{y}^{[0]} = \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ \rho - 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

où  $t^0 = 0$ ,  $T = 100$  et

$$\begin{aligned} \mathbf{f} : [0, 100] \times \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (t, \square) &\longmapsto \mathbf{f}(t, \square) = \begin{pmatrix} -\sigma \square_1 + \sigma \square_2 \\ -\square_1 \square_3 + \rho \square_1 - \square_2 \\ \square_1 \square_2 - \beta \square_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ou encore ...

Le problème de Cauchy correspondant au modèle de Lorentz :

Trouver  $\mathbf{y} : [t^0, t^0 + T] \rightarrow \mathbb{R}^3$  solution de

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)), \quad \forall t \in [t^0, t^0 + T]$$

$$\mathbf{y}(t^0) = \mathbf{y}^{[0]} = \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ \rho - 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

où  $t^0 = 0$ ,  $T = 100$  et

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &: [0, 100] \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (t, \mathbf{z}) &\longmapsto \mathbf{f}(t, \mathbf{z}) = \begin{pmatrix} -\sigma z_1 + \sigma z_2 \\ -z_1 z_3 + \rho z_1 - z_2 \\ z_1 z_2 - \beta z_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{z}) = \begin{pmatrix} -\sigma z_1 + \sigma z_2 \\ -z_1 z_3 + \rho z_1 - z_2 \\ z_1 z_2 - \beta z_3 \end{pmatrix}$$

```
function w=fLorentz(t,z,beta,rho,sigma)
% Fonction de Cauchy associee au modele de Lorentz
% beta, rho et sigma parametres physiques
w=[-sigma*z(1)+sigma*z(2); ...
   -z(1)*z(3)+rho*z(1)-z(2); z(1)*z(2)-beta*z(3)];
end
```

Listing: fonction de Cauchy : fichier fLorentz.m

```
sigma=10;rho=28;beta=8/3;
fCauchy=@(t,z) fLorentz(t,z,beta,rho,sigma);

y0=[-8;8;rho-1];
[t,Y]=redRK4Vec(fCauchy,0,100,y0,10000);

opts={'interpreter','latex','FontSize',12};
figure(1)
plot3(Y(1,:),Y(2,:),Y(3,:))
legend('$x(t),y(t),z(t)$','Location','northeast',opts{:})
xlabel('$x$',opts{:})
ylabel('$y$',opts{:})
zlabel('$z$',opts{:})
view(-5,10)

figure(2)
subplot(3,1,1)
plot(t,Y(1,:));
xlabel('$t$',opts{:}),ylabel('$x(t)$',opts{:})
subplot(3,1,2)
plot(t,Y(2,:));
xlabel('$t$',opts{:}),ylabel('$y(t)$',opts{:})
subplot(3,1,3)
plot(t,Y(3,:));
xlabel('$t$',opts{:}),ylabel('$z(t)$',opts{:})
```

Listing: Résolution du modèle de Lorentz : script prgLorentz.m