Ecole d'ingénieurs Sup Galilée
Energétique - Informatique - Instrumentation
Mathématiques Appliquées et Calcul Scientifique
Télécommunications et Réseaux

Analyse Numérique I*

Sup'Galilée, Ingénieurs Energétique, 1ère année

François Cuvelier

Laboratoire d'Analyse Géométrie et Applications
Institut Galilée
Université Paris XIII.

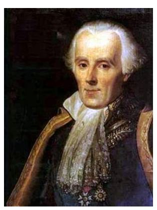
2025/02/13

*Compilé le 2025/02/13 à 05:50:38

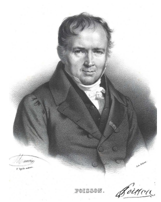
Plan du cours

Chapitre I	:	Algorithmique numérique
Chapitre II	:	Dérivation numérique
Chapitre III	:	Résolution numérique des E.D.O.
Chapitre IV	:	**Résolution numérique des E.D.P.**

Equation de Laplace et équation de Poisson



Pierre-Simon Laplace 1749-1827, mathématicien, astronome, physicien et homme politique français



Siméon Denis Poisson 1781-1840, mathématicien, géomètre et physicien français

$$-\Delta u = f, \quad \text{dans } \Omega \subset \mathbb{R}^n \tag{1}$$

où Δ est l'opérateur laplacien : $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$.
Equation de Laplace si $f = 0$, sinon équation de Poisson.

Conditions aux limites

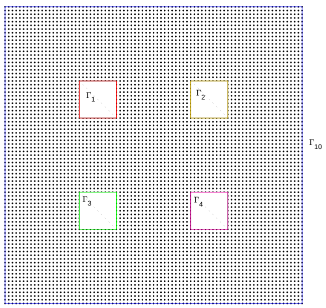
$$-\Delta u = f, \quad \text{dans } \Omega \subset \mathbb{R}^n$$

- **Dirichlet** si on impose, sur une partie de $\partial\Omega$,
$$u = g, \quad \text{sur } \Gamma_{\mathrm{D}} \subset \partial\Omega. \tag{2}$$
- **Neumann** si on impose sur une partie de $\partial\Omega$,
$$\frac{\partial u}{\partial n} = g, \quad \text{sur } \Gamma_{\mathrm{N}} \subset \partial\Omega. \tag{3}$$
où $\frac{\partial u}{\partial n} = \langle \mathbf{grad}\, u, \boldsymbol{n} \rangle$ avec $\boldsymbol{n}$ normale exterieure unitaire à Ω
- **Robin** si on impose sur une partie de $\partial\Omega$
$$\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u = g, \quad \text{sur } \Gamma_{\mathrm{R}} \subset \partial\Omega. \tag{4}$$

Problème de condensateur en 2D

Find $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ such that

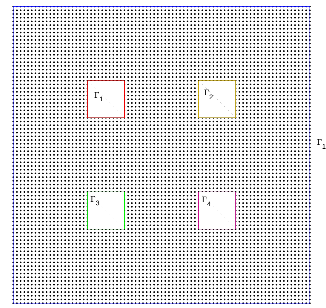
$$\begin{aligned} -\Delta u &= 0 \text{ in } \Omega \subset \mathbb{R}^2, \\ u &= 0 \text{ on } \Gamma_{10}, \\ u &= -1 \text{ on } \Gamma_2 \cup \Gamma_3, \\ u &= 1 \text{ on } \Gamma_1 \cup \Gamma_4, \end{aligned}$$

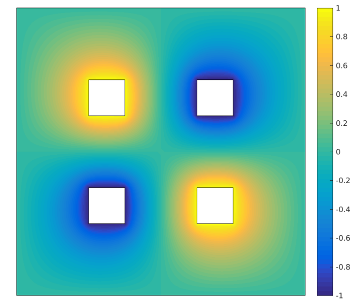


Problème de condensateur en 2D

Find $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ such that

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 0 \text{ in } \Omega \subset \mathbb{R}^2, \\ u &= 0 \text{ on } \Gamma_{10}, \\ u &= -1 \text{ on } \Gamma_2 \cup \Gamma_3, \\ u &= 1 \text{ on } \Gamma_1 \cup \Gamma_4, \end{aligned}$$

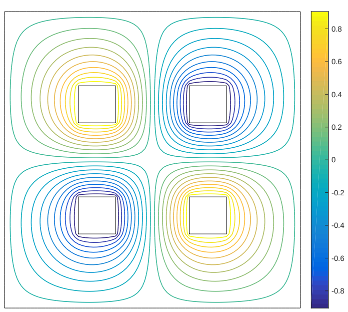


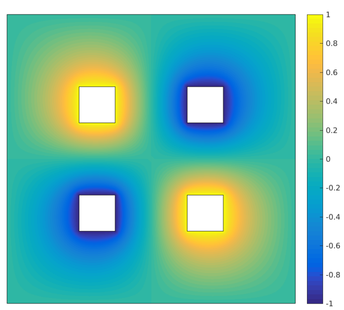


Problème de condensateur en 2D

Find $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ such that

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 0 \text{ in } \Omega \subset \mathbb{R}^2, \\ u &= 0 \text{ on } \Gamma_{10}, \\ u &= -1 \text{ on } \Gamma_2 \cup \Gamma_3, \\ u &= 1 \text{ on } \Gamma_1 \cup \Gamma_4, \end{aligned}$$

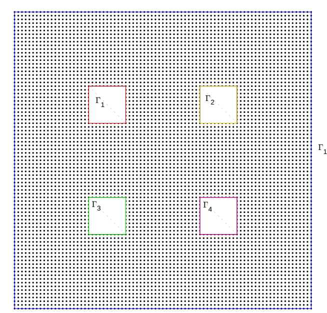




Champ de vitesses en 2D : $V = \nabla u$

Trouver $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que

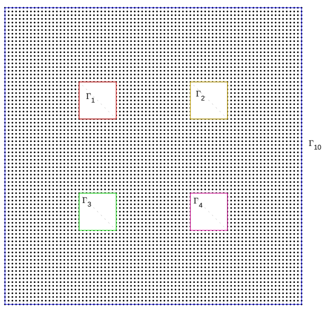
$$\begin{aligned} -\Delta u &= 0 \text{ dans } \Omega \subset \mathbb{R}^2, \\ u &= -1 \text{ sur } \Gamma_2 \cup \Gamma_3, \\ u &= 1 \text{ sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_4, \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= 0 \text{ sur } \Gamma_{10}. \end{aligned}$$

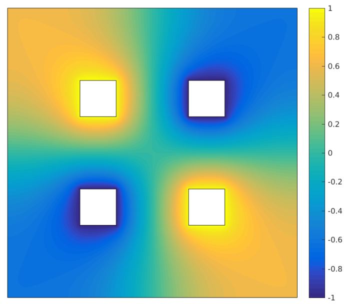


Champ de vitesses en 2D : $V = \nabla u$

Trouver $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 0 \text{ dans } \Omega \subset \mathbb{R}^2, \\ u &= -1 \text{ sur } \Gamma_2 \cup \Gamma_3, \\ u &= 1 \text{ sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_4, \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= 0 \text{ sur } \Gamma_{10}. \end{aligned}$$

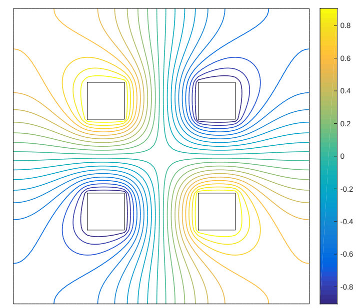


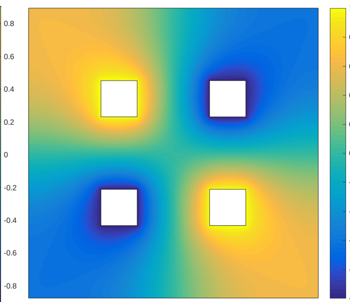


Champ de vitesses en 2D : $V = \nabla u$

Trouver $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 0 \text{ dans } \Omega \subset \mathbb{R}^2, \\ u &= -1 \text{ sur } \Gamma_2 \cup \Gamma_3, \\ u &= 1 \text{ sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_4, \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= 0 \text{ sur } \Gamma_{10}. \end{aligned}$$





Problème mal posé

Problème en dimension n

Find $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ such that

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \text{ in } \Omega \subset \mathbb{R}^n, \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= g \text{ sur } \partial\Omega. \end{aligned}$$

où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^n$.
Ce problème est **mal posé** : non unicité de la solution.

$$u \text{ solution} \quad \Rightarrow \quad u + \text{constante solution}$$

Equation de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, \boldsymbol{x}) - D\Delta u(t, \boldsymbol{x}) = \frac{f(t, \boldsymbol{x})}{\rho c}, \quad \forall \boldsymbol{x} \in \Omega, \ \forall t \in [0, T] \tag{5}$$

- $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ de frontière $\partial\Omega$
- D, coefficient de diffusivité thermique (en m^2/s),
- f, production volumique de chaleur (en W/m^3),
- ρ, masse volumique du matériau (en kg/m^3),
- c, chaleur spécifique massique du matériau (en $J/kg/K$),
- Δu laplacien (en espace) : $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_d^2}$

Problème bien posé ?

Equation de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,\boldsymbol{x}) - D\Delta u(t,\boldsymbol{x}) = \frac{f(t,\boldsymbol{x})}{\rho c}, \quad \forall \boldsymbol{x} \in \Omega,\ \forall t \in [0,T] \tag{5}$$

Problème bien posé :

- **condition initiale**

$$\forall \boldsymbol{x} \in \Omega, \quad u(0,\boldsymbol{x}) = u_0(\boldsymbol{x}) \tag{6}$$

- **conditions aux limites** sur $\partial\Omega$
  - **Dirichlet** :
  $$\forall \boldsymbol{x} \in \Gamma_{\mathrm{D}} \subset \partial\Omega,\ \forall t \in [0,T] \quad u(t,\boldsymbol{x}) = g_D(t,\boldsymbol{x})$$
  - **Neumann** :
  $$\forall \boldsymbol{x} \in \Gamma_{\mathrm{N}} \subset \partial\Omega,\ \forall t \in [0,T] \quad D\frac{\partial u}{\partial n}(t,\boldsymbol{x}) = g_N(t,\boldsymbol{x})$$
  - **Robin** :
  $$\forall \boldsymbol{x} \in \Gamma_{\mathrm{R}} \subset \partial\Omega,\ \forall t \in [0,T] \quad D\frac{\partial u}{\partial n}(t,\boldsymbol{x}) + \alpha u(t,\boldsymbol{x}) = g_N(t,\boldsymbol{x})$$

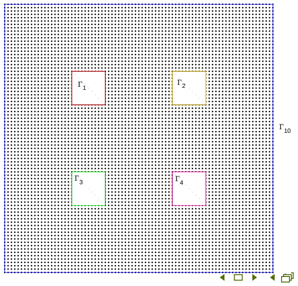
Problème de chaleur en 2D

Find $u : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ such that

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} - D\Delta u &= 0 \ \text{ in } [0,T] \times \Omega,\\
u(0,\boldsymbol{x}) &= 20 \ \forall \boldsymbol{x} \in \Omega,\\
\frac{\partial u}{\partial n} &= 0 \ \text{ on } \Gamma_{10},\\
u &= g_1 \ \text{ on } \Gamma_2 \cup \Gamma_3,\\
u &= g_2 \ \text{ on } \Gamma_1 \cup \Gamma_4,
\end{aligned}$$

où Ω (cotés de $20cm$)

- $D = 98.8 \times 10^{-6}$ (aluminium) ou $D = 23.9 \times 10^{-6}$ (plomb),
- $\forall \boldsymbol{x} \in \Gamma_2 \cup \Gamma_3$, $g_1(t,\boldsymbol{x}) = (20 + 40t)$ si $t <= 1$ et $g_1(t,\boldsymbol{x}) = 60$ sinon,
- $\forall \boldsymbol{x} \in \Gamma_1 \cup \Gamma_4$, $g_2(t,\boldsymbol{x}) = (20 + 80t)$ si $t <= 1$ et $g_2(t,\boldsymbol{x}) = 100$ sinon.



Equation des ondes

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,\boldsymbol{x}) - c^2\Delta u(t,\boldsymbol{x}) = 0, \quad \forall \boldsymbol{x} \in \Omega,\ \forall t \in [0,T] \tag{7}$$

- $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ de frontière $\partial\Omega$
- $c > 0$ vitesse de propagation de l'onde,

Problème bien posé ?

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,\boldsymbol{x}) - c^2\Delta u(t,\boldsymbol{x}) = 0, \quad \forall \boldsymbol{x} \in \Omega,\ \forall t \in [0,T]$$

- **conditions initiales**

$$u(0,\boldsymbol{x}) = u_0(\boldsymbol{x}), \qquad \forall \boldsymbol{x} \in \Omega \ \ \textbf{[position initiale]} \tag{8}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0,\boldsymbol{x}) = v_0(\boldsymbol{x}), \qquad \forall \boldsymbol{x} \in \Omega \ \ \textbf{[vitesse initiale]} \tag{9}$$

- **conditions aux limites** sur $\partial\Omega$
  - **Dirichlet** :
  $$\forall \boldsymbol{x} \in \Gamma_{\mathrm{D}} \subset \partial\Omega,\ \forall t \in [0,T], \qquad u(t,\boldsymbol{x}) = g_D(t,\boldsymbol{x})$$
  - **Neumann** :
  $$\forall \boldsymbol{x} \in \Gamma_{\mathrm{N}} \subset \partial\Omega,\ \forall t \in [0,T], \qquad c^2\frac{\partial u}{\partial n}(t,\boldsymbol{x}) = g_N(t,\boldsymbol{x})$$
  - **Robin** :
  $$\forall \boldsymbol{x} \in \Gamma_{\mathrm{R}} \subset \partial\Omega,\ \forall t \in [0,T], \qquad c^2\frac{\partial u}{\partial n}(t,\boldsymbol{x}) + \alpha u(t,\boldsymbol{x}) = g_N(t,\boldsymbol{x})$$

Résolution numérique d'EDP

Méthodes déterministes :

- **méthode des différences finies**
- **méthode des éléments finis**
- **méthode des volumes finis**

Soient $a < b$, $c > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$, et $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ donnés.

EDP modèle stationnaire 1D

Trouver $u : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{aligned} -u'' + cu &= f \text{ in }]a, b[, \\ u(a) &= \alpha, \\ u(b) &= \beta. \end{aligned}$$

ou

EDP modèle stationnaire 1D : formulation aux points

Trouver $u(x) \in \mathbb{R}$, $\forall x \in [a, b]$ telle que

$$\begin{aligned} -u''(x) + cu(x) &= f(x) \quad \forall x \in]a, b[, \\ u(a) &= \alpha, \\ u(b) &= \beta. \end{aligned}$$

Chercher u ou $u(x)$, $\forall x \in [a, b]$ (infinité de points!)

EDP modèle stationnaire 1D : formulation aux points

Trouver $u(x) \in \mathbb{R}$, $\forall x \in [a, b]$ telle que

$$\begin{aligned} -u''(x) + cu(x) &= f(x) \quad \forall x \in]a, b[, \\ u(a) &= \alpha, \\ u(b) &= \beta. \end{aligned}$$

$$x_i = a + ih, \quad \forall i \in [\![0, N]\!], \text{ avec } h = \frac{b-a}{N}.$$

EDP modèle stationnaire1D : formulation aux points de discrétisation

Trouver $u(x_i) \in \mathbb{R}$, $\forall i \in [\![0, N]\!]$ tels que

$$\begin{aligned} -u''(x_i) + cu(x_i) &= f(x_i) \quad \forall i \in]\![0, N]\![, && (10) \\ u(x_0) &= \alpha, && (11) \\ u(x_N) &= \beta. && (12) \end{aligned}$$

EDP modèle stationnaire1D : formulation aux points de discrétisation

Trouver $u(x_i) \in \mathbb{R}$, $\forall i \in [\![0, N]\!]$ tels que

$$\begin{aligned} -u''(x_i) + cu(x_i) &= f(x_i) \quad \forall i \in]\![0, N]\![, \\ u(x_0) &= \alpha, \\ u(x_N) &= \beta. \end{aligned}$$

$$u''(x_i) = (D_h^2 u)(x_i) + \mathcal{O}(h^2) = \frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1})}{h^2} + \mathcal{O}(h^2).$$

EDP modèle stationnaire1D : formulation aux points de discrétisation

Trouver $u(x_i) \in \mathbb{R}$, $\forall i \in [\![0, N]\!]$ tels que

$$\begin{aligned} -u''(x_i) + cu(x_i) &= f(x_i) \quad \forall i \in]\!]0, N[\![, \\ u(x_0) &= \alpha, \\ u(x_N) &= \beta. \end{aligned}$$

$$u''(x_i) = (D_h^2 u)(x_i) + \mathcal{O}(h^2) = \frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1})}{h^2} + \mathcal{O}(h^2).$$

EDP modèle stationnaire en dimension 1 : formulation aux points de discrétisation (bis)

Trouver $u(x_i) \in \mathbb{R}$, $\forall i \in [\![0, N]\!]$ tels que

$$-\frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1})}{h^2} - \mathcal{O}(h^2) + cu(x_i) = f(x_i) \quad \forall i \in]\!]0, N[\![, \tag{13}$$
$$u(x_0) = \alpha, \tag{14}$$
$$u(x_N) = \beta. \tag{15}$$

EDP modèle stationnaire en dimension 1 : formulation aux points de discrétisation (bis)

Trouver $u(x_i) \in \mathbb{R}$, $\forall i \in [\![0, N]\!]$ tels que

$$\begin{aligned} -\frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1})}{h^2} - \mathcal{O}(h^2) + cu(x_i) &= f(x_i) \quad \forall i \in]\!]0, N[\![, \\ u(x_0) &= \alpha, \\ u(x_N) &= \beta. \end{aligned}$$

On oublie le $\mathcal{O}(h^2)$ et on pose $u_i \approx u(x_i)$.

EDP modèle stationnaire en dimension 1 : formulation aux points de discrétisation (bis)

Trouver $u(x_i) \in \mathbb{R}$, $\forall i \in [\![0, N]\!]$ tels que

$$\begin{aligned} -\frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1})}{h^2} - \mathcal{O}(h^2) + cu(x_i) &= f(x_i) \quad \forall i \in]\!]0, N[\![, \\ u(x_0) &= \alpha, \\ u(x_N) &= \beta. \end{aligned}$$

On oublie le $\mathcal{O}(h^2)$ et on pose $u_i \approx u(x_i)$.

EDP modèle stationnaire 1D : schéma aux différences finies

Trouver $u_i \in \mathbb{R}$, $\forall i \in [\![0, N]\!]$ tels que

$$-\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + cu_i = f(x_i) \quad \forall i \in]\!]0, N[\![, \tag{16}$$
$$u_0 = \alpha, \tag{17}$$
$$u_N = \beta. \tag{18}$$

EDP modèle stationnaire 1D : schéma aux différences finies

Trouver $u_i \in \mathbb{R}$, $\forall i \in [\![0, N]\!]$ tels que

$$-\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + cu_i = f(x_i) \quad \forall i \in]\!]0, N[\![, \tag{16}$$
$$u_0 = \alpha, \tag{17}$$
$$u_N = \beta. \tag{18}$$

système linéaire de $N+1$ équations à $N+1$ inconnues !

$$\left\{ \begin{array}{lcll} u_0 & = & \alpha & \leftarrow \text{eq. en } x_0 \\ -u_2 + \mu u_1 - u_0 & = & h^2 f(x_1) & \leftarrow \text{eq. en } x_1 \\ & \vdots & & \\ -u_N + \mu u_{N-1} - u_{N-2} & = & h^2 f(x_{N-1}) & \leftarrow \text{eq. en } x_{N-1} \\ u_N & = & \beta & \leftarrow \text{eq. en } x_N \end{array} \right.$$

avec $\mu = 2 + ch^2$.

$$\left\{\begin{array}{lcll}
u_0 & = & \alpha & \leftarrow \text{eq. en } x_0\\
-u_2+\mu u_1-u_0 & = & h^2 f(x_1) & \leftarrow \text{eq. en } x_1\\
-u_3+\mu u_2-u_1 & = & h^2 f(x_2) & \leftarrow \text{eq. en } x_2\\
 & \vdots & & \\
-u_{N-1}+\mu u_{N-2}-u_{N-3} & = & h^2 f(x_{N-2}) & \leftarrow \text{eq. en } x_{N-2}\\
-u_N+\mu u_{N-1}-u_{N-2} & = & h^2 f(x_{N-1}) & \leftarrow \text{eq. en } x_{N-1}\\
u_N & = & \beta & \leftarrow \text{eq. en } x_N
\end{array}\right.$$

$$\mathbb{A}\boldsymbol{U} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\begin{array}{c|cccccc|c}
1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0\\
\hline
-1 & \mu & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0\\
0 & -1 & \mu & -1 & 0 & \dots & 0 & 0\\
0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots\\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots\\
\vdots & 0 & \dots & 0 & 1 & \mu & -1 & 0\\
0 & 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & \mu & -1\\
\hline
0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1
\end{array}\right)
\left(\begin{array}{c} u_0\\ \hline u_1\\ u_2\\ \vdots\\ \vdots\\ u_{N-2}\\ u_{N-1}\\ \hline u_N\end{array}\right)
=
\left(\begin{array}{c} \alpha\\ \hline h^2 f(x_1)\\ h^2 f(x_2)\\ \vdots\\ \vdots\\ h^2 f(x_{N-2})\\ h^2 f(x_{N-1})\\ \hline \beta\end{array}\right)
\stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{B} \quad (19)$$

avec $\mu = 2 + ch^2$.

Proposition 3.1 : *admis*

Le schéma aux différences finies (16)-(18) est consistant à l'ordre 2 avec l'EDP (10)-(10) et on a

$$\max_{i\in[\![0,N]\!]} |u(x_i) - u_i| = \mathcal{O}(h^2). \quad (20)$$

Exercice 1 (schéma étudié en cours)

Q. 1 *Ecrire la fonction* AssembleMat1D *retournant la matrice* $\mathbb{M} \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ *définie par*

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix}
\gamma & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0\\
\beta & \alpha & \beta & \ddots & & & \vdots\\
0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots\\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\
\vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\
\vdots & & & \ddots & \beta & \alpha & \beta\\
0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & \gamma
\end{pmatrix} \quad (1)$$

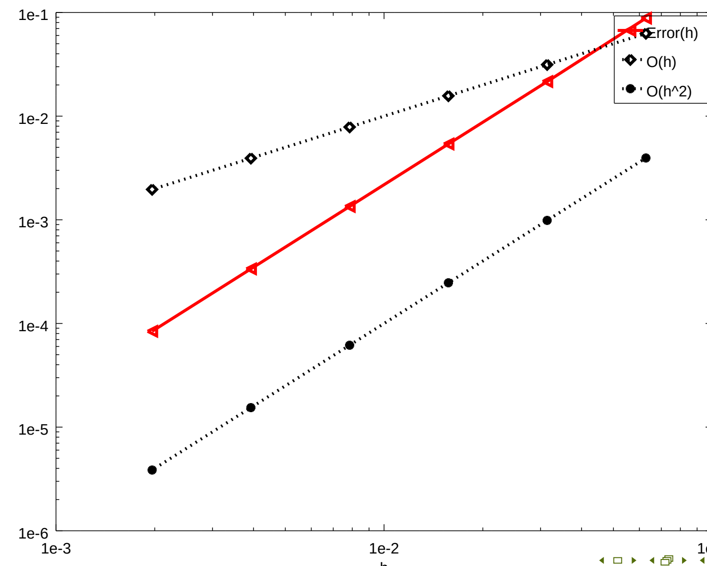
où α, β et γ sont des réels donnés.

On souhaite résoudre par un schéma aux différences finies l'EDP suivante

$$\begin{array}{rcl}
-u'' + cu & = & f \text{ in }]a,b[,\\
u(a) & = & \alpha,\\
u(b) & = & \beta.
\end{array}$$

Q. 2 *En prenant le jeu de données $a=0$, $b=2\pi$, $c=1$, $\alpha=1$, $\beta=-1$ et $f : x \mapsto \cos(x^2)$, écrire une fonction permettant de résoudre l'EDP précédente. On pourra utiliser la fonction $\boldsymbol{X} \leftarrow$ Solve$(\mathbb{A}, \boldsymbol{B})$ retournant la solution du système linéaire $\mathbb{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$.*

Q. 3 *En choisissant judicieusement un jeu de données écrire un programme permettant de vérifier l'ordre du schéma utilisé à l'aide de la formule (20).*



```
function M=AssembleMat1D(d,alp,bet,gam)
  M=sparse(d,d);
  M(1,1)=gam;M(d,d)=gam;
  for i=2:d-1
    M(i,i)=alp;
    M(i,i-1)=bet;M(i,i+1)=bet;
  end
end
```

Listing: fonction Matlab/Octave `AssembleMat1D`

```
function [x,U]=solveEDP1(a,b,c,alp,bet,f,N)
  h=(b-a)/N;
  x=a:h:b;
  A=AssembleMat1D(N+1,2+c*h*h,-1,h*h);
  B=zeros(N+1,1);
  B(1)=alp;B(N+1)=bet;
  for i=2:N
    B(i)=f(x(i));
  end
  B=h*h*B;
  U=A\B;
end
```

Listing: fonction Matlab/Octave `solveEDP1`

```
clear all
close all
% Initialisation des donnees
uex=@(x) sin(x.^2);
c=1;
f=@(x) 4*x^2*sin(x^2) - 2*cos(x^2) + c*sin(x^2);
a=0;b=2*pi;
% Calcul des erreurs
LN=[100,200,400,800,1600,3200];
k=1;
for N=LN
  [x,U]=solveEDP1(a,b,c,uex(a),uex(b),f,N);
  H(k)=(b-a)/N;
  E(k)=max(abs(uex(x)'-U));
  k=k+1;
end
% Representation graphique
loglog(H,E,'r<-','LineWidth',2)
hold on
loglog(H,H,'kd:','LineWidth',2)
loglog(H,H.^2,'k*:','LineWidth',2)
legend('Error(h)','O(h)','O(h^2)')
xlabel('h')
```

Listing: Script Matlab/Octave pour la représentation de l'ordre

EDP stationnaire + CL mixtes

EDP modèle stationnaire 1D avec condition de Dirichlet à droite et Neumann à gauche

Trouver $u : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$-u'' + cu = f \quad \text{in }]a,b[, \tag{21}$$
$$u(a) = \alpha, \tag{22}$$
$$u'(b) = \beta. \tag{23}$$

Seule la dernière ligne du système linéaire est à modifier! Remplacer par ???

EDP stationnaire + CL mixtes

EDP modèle stationnaire 1D avec condition de Dirichlet à droite et Neumann à gauche

Trouver $u : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$-u'' + cu = f \quad \text{in }]a,b[, \tag{21}$$
$$u(a) = \alpha, \tag{22}$$
$$u'(b) = \beta. \tag{23}$$

Seule la dernière ligne du système linéaire est à modifier! Remplacer par ???

$$u'(x_N) = (D_h^+ u)(x_N) + \mathcal{O}(h) = \frac{u(x_N) - u(x_{N-1})}{h} + \mathcal{O}(h) = \beta.$$

EDP stationnaire + CL mixtes

EDP modèle stationnaire 1D avec condition de Dirichlet à droite et Neumann à gauche

Trouver $u : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{aligned} -u'' + cu &= f \quad \text{in }]a, b[, && (21)\\ u(a) &= \alpha, && (22)\\ u'(b) &= \beta. && (23) \end{aligned}$$

Seule la dernière ligne du système linéaire est à modifier! Remplacer par ???

$$u'(x_N) = (D_h^+ u)(x_N) + \mathcal{O}(h) = \frac{u(x_N) - u(x_{N-1})}{h} + \mathcal{O}(h) = \beta.$$

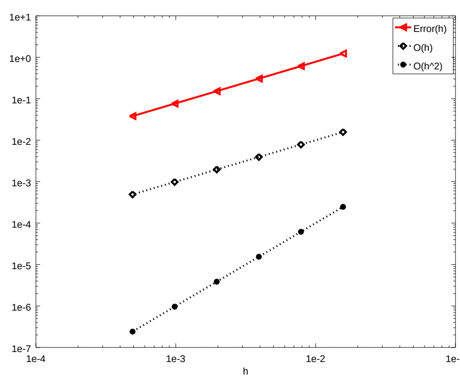
$$\frac{u_N - u_{N-1}}{h} = \beta. \tag{24}$$

$$\left\{ \begin{array}{lll} u_0 & = \alpha & \leftarrow \text{eq. en } x_0 \\ -u_2 + \mu u_1 - u_0 & = h^2 f(x_1) & \leftarrow \text{eq. en } x_1 \\ -u_3 + \mu u_2 - u_1 & = h^2 f(x_2) & \leftarrow \text{eq. en } x_2 \\ & \vdots & \\ -u_{N-1} + \mu u_{N-2} - u_{N-3} & = h^2 f(x_{N-2}) & \leftarrow \text{eq. en } x_{N-2} \\ -u_N + \mu u_{N-1} - u_{N-2} & = h^2 f(x_{N-1}) & \leftarrow \text{eq. en } x_{N-1} \\ u_N - u_{N-1} & = h\beta & \leftarrow \text{eq. en } x_N \end{array} \right.$$

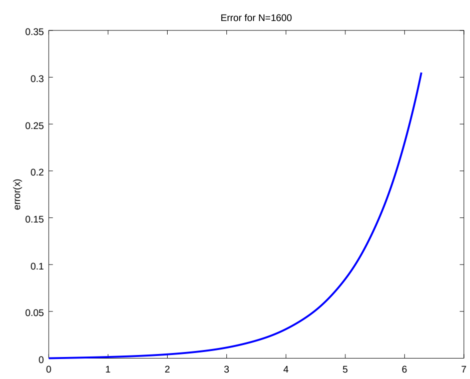
$$\mathbb{A}\boldsymbol{U} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ -1 & \mu & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \mu & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \dots & 0 & -1 & \mu & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & \mu & -1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{N-2} \\ u_{N-1} \\ u_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ h^2 f(x_1) \\ h^2 f(x_2) \\ \vdots \\ \vdots \\ h^2 f(x_{N-2}) \\ h^2 f(x_{N-1}) \\ h\beta \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{B} \tag{25}$$

Mais ...

Schéma d'ordre 1 !!!



(a) Représentation en échelle logarithmique de l'ordre du schéma



(b) Représentation de l'erreur en fonction de x pour $N = 1600$

Ecrire un schéma d'ordre 2 pour Neumann

TD

Exercice 2

Soit φ une fonction suffisament régulière et $h > 0$

Q. 1 *Montrer que*

$$\frac{d\varphi}{dx}(x) = \frac{-3\varphi(x) + 4\varphi(x+h) - \varphi(x+2h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \tag{1}$$

Q. 2 *Montrer que*

$$\frac{d\varphi}{dx}(x) = \frac{3\varphi(x) - 4\varphi(x-h) + \varphi(x-2h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \tag{2}$$

Q. 3 *Déterminer une formule permettant de calculer une approximation à l'ordre 2 de* $\frac{d^2\varphi}{dx^2}(x)$ *en utilisant uniquement des valeurs de la fonction* φ *aux points* $x + ih$ *avec* $i \in \mathbb{N}$.

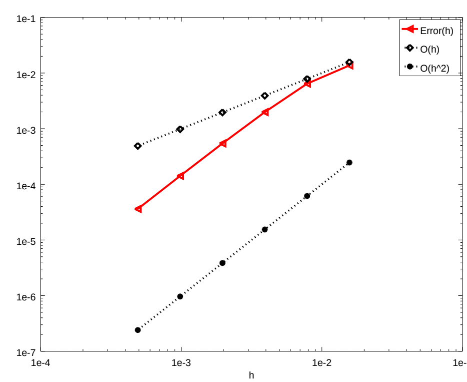
Q. 4 *Déterminer une formule permettant de calculer une approximation à l'ordre 2 de* $\frac{d^2\varphi}{dx^2}(x)$ *en utilisant uniquement des valeurs de la fonction* φ *aux points* $x - ih$ *avec* $i \in \mathbb{N}$.

$$
\begin{cases}
u_0 &= \alpha & \color{blue}{\leftarrow \text{eq. en } x_0}\\
-u_2 + \mu u_1 - u_0 &= f(x_1) & \color{blue}{\leftarrow \text{eq. en } x_1}\\
-u_3 + \mu u_2 - u_1 &= f(x_2) & \color{blue}{\leftarrow \text{eq. en } x_2}\\
 &\vdots & \\
-u_{N-1} + \mu u_{N-2} - u_{N-3} &= f(x_{N-2}) & \color{blue}{\leftarrow \text{eq. en } x_{N-2}}\\
-u_N + \mu u_{N-1} - u_{N-2} &= f(x_{N-1}) & \color{blue}{\leftarrow \text{eq. en } x_{N-1}}\\
\color{magenta}{3u_N - 4u_{N-1} + u_{N-2}} &\color{magenta}{= 2h\beta} & \color{blue}{\leftarrow \text{eq. en } x_N}
\end{cases}
$$

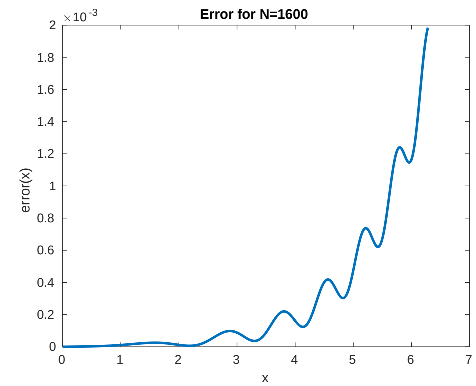
$$
\mathbb{A}\boldsymbol{U} \stackrel{\text{def}}{=}
\left(\begin{array}{c|cccccc|c}
1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0\\
\hline
-1 & \mu & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0\\
0 & -1 & \mu & -1 & 0 & \dots & 0 & 0\\
0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots\\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots\\
\vdots & 0 & \dots & 0 & -1 & \mu & -1 & 0\\
0 & 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & \mu & -1\\
\hline
0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \color{magenta}{1} & \color{magenta}{-4} & \color{magenta}{3}
\end{array}\right)
\left(\begin{array}{c}
u_0\\ \hline u_1\\ u_2\\ \vdots\\ \vdots\\ u_{N-2}\\ u_{N-1}\\ \hline u_N
\end{array}\right)
=
\left(\begin{array}{c}
\alpha\\ \hline h^2 f(x_1)\\ h^2 f(x_2)\\ \vdots\\ \vdots\\ h^2 f(x_{N-2})\\ h^2 f(x_{N-1})\\ \hline \color{magenta}{2h\beta}
\end{array}\right)
\stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{B} \tag{54}
$$

et ...

Schéma d'ordre 2



(a) Représentation en échelle logarithmique de l'ordre du schéma



(b) Représentation de l'erreur en fonction de x pour $N = 1600$

Exercice 3

Soit le problème suivant

$$
\begin{aligned}
-u''(x) + c(x)u(x) &= f(x), \ \forall x \in]a; b[, && (1)\\
u'(a) &= \alpha, && (2)\\
u(b) &= \beta. && (3)
\end{aligned}
$$

où c est une fonction positive.

Q. 1
1. *Quelles sont les données du problème (1)-(3)? (préciser le type de chaque donnée : réel, entier, fonction, vecteur, ...)*
2. *Quelles sont les inconnues du problème (1)-(3)? (préciser le type)*
3. *Quelles sont les conditions initiales?*
4. *Quelles sont les conditions aux limites?*

Q. 2 *Construire une discrétisation régulière de $[a; b]$ avec N pas de discrétisation en espace.*

On note x_i, $i \in [\![0, N]\!]$ cette discrétisation. On souhaite résoudre (1) à l'aide du schéma numérique

$$
-\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2} + c_i u_i = f_i. \tag{4}
$$

Q. 3
1. *Expliquer comment le schéma (4) a été obtenu à partir de (1) et préciser ce que représente les termes u_i, f_i, c_i et Δx?*
2. *Donner l'ensemble $\mathcal{E}$ des valeurs que peut prendre i dans le schéma (1).*
3. *Construire une discrétisation des conditions aux limites d'ordre 2 au moins.*
4. *Le schéma global est de quel ordre? Justifiez.*

On note $\boldsymbol{V}$ le vecteur de dimension $N+1$, de composantes $\boldsymbol{V}_i = u_{i-1}$, $\forall i \in [\![1, N+1]\!]$.

Q. 4 *Montrer que le vecteur $\boldsymbol{V}$ est solution du système linéaire*

$$
\mathbb{A}\boldsymbol{V} = \boldsymbol{F} \tag{5}
$$

en explicitant la matrice $\mathbb{A}$ et le vecteur $\boldsymbol{F}$ (préciser les dimensions).

Q. 5 *Ecrire un algorithme complet de résolution du problème (1) à (3) basé sur (5). (Utiliser au maximum les fonctions). On pourra utiliser la fonction $\boldsymbol{X} \leftarrow \text{Solve}(\mathbb{A}, \boldsymbol{B})$ retournant la solution du système linéaire $\mathbb{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$.*