

Méthodes Numériques II
Chapitre 1: Algorithmique
Exercices axés sur l'algèbre linéaire
version du 2025/01/21 à 10:28:11

EXERCICE 1

Soient $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ et $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$.

Q. 1 Ecrire une fonction `dot` permettant de calculer le produit scalaire du vecteur \mathbf{u} par \mathbf{v} , noté mathématiquement par $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$. □

Q. 2 Ecrire une fonction `norm2` permettant de calculer la norme euclidienne du vecteur \mathbf{u} donnée par $\|\mathbf{u}\|_2 \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle}$. □

Soient a et b deux réels.

Q. 3 Ecrire une fonction `aUpbV` permettant de calculer le vecteur $\mathbf{w} \stackrel{\text{def}}{=} a\mathbf{u} + b\mathbf{v}$. □

Q. 4 Ecrire un programme algorithmique permettant de calculer $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_2$ avec $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$. □

EXERCICE 2

Q. 1 Ecrire une fonction `VecZeros` retournant le vecteur nul de \mathbb{R}^n . □

Q. 2 Ecrire une fonction `VecConst` retournant le vecteur de \mathbb{R}^n dont toutes les composantes valent $\alpha \in \mathbb{R}$. □

Q. 3 Soient $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Ecrire une fonction `VecPlusConst` retournant le vecteur de $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \mathbf{v}_i = \mathbf{u}_i + \alpha.^\dagger$$

On suppose que l'on dispose de la fonction algorithmique `rand()` retournant un réel aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0, 1]$.

Q. 4 Ecrire une fonction `VecRand` retournant un vecteur de \mathbb{R}^n dont toutes les composantes sont aléatoires suivant la loi uniforme sur $[a, b]$. □

EXERCICE 3

Q. 1 Ecrire une fonction `MatZeros` retournant la matrice nulle de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. □

[†]Cette opération n'est pas une opération algébrique dans \mathbb{R}^n , c'est à dire mathématiquement, on ne peut pas écrire $\mathbf{u} + \alpha!$

Q. 2 Ecrire une fonction `MatConst` retournant la matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ dont toutes les composantes valent $\alpha \in \mathbb{R}$. □

Q. 3 Soient $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Ecrire une fonction `MatPlusConst` retournant la matrice $B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, m \rrbracket \times \llbracket 1, n \rrbracket, \quad B_{i,j} = A_{i,j} + \alpha.^\ddagger$$

On suppose que l'on dispose de la fonction algorithmique `rand()` retournant un réel aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0, 1]$.

Q. 4 Ecrire une fonction `MatRand` retournant une matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ dont toutes les composantes sont aléatoires suivant la loi uniforme sur $[a, b]$. □

EXERCICE 4

Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.

Q. 1 a. Ecrire une fonction algorithmique `setMatCol` permettant d'initialiser le j -ème vecteur colonne de A par un vecteur $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$, avec $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

b. Ecrire une fonction algorithmique `getMatCol` retournant le j -ème vecteur colonne de A avec $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$. □

Q. 2 a. Ecrire une fonction algorithmique `setMatRow` permettant d'initialiser le i -ème vecteur ligne de A par un vecteur $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, avec $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$.

b. Ecrire une fonction algorithmique `getMatRow` retournant le i -ème vecteur ligne de A avec $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$. □

EXERCICE 5

Q. 1 Soient $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$. Ecrire une fonction `aApbB` permettant de calculer la matrice $W \stackrel{\text{def}}{=} \alpha A + \beta B$. □

Q. 2 Soient $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et \mathbf{u} un vecteur (colonne).

a. A quelle(s) condition(s) le produit de la matrice A par le vecteur \mathbf{u} existe-t-il?

b. Sous les conditions précédentes, on note $\mathbf{v} \stackrel{\text{def}}{=} A\mathbf{u}$.

- A quel espace appartient \mathbf{v} ?
- Rappeler précisément la formule permettant de calculer les composantes de \mathbf{v} .

c. Ecrire une fonction `ProdMatVec` permettant de calculer $\mathbf{v} \stackrel{\text{def}}{=} A\mathbf{u}$.

d. Donner un exemple algorithmique d'utilisation. □

EXERCICE 6

[‡]Cette opération n'est pas une opération algébrique dans $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, c'est à dire mathématique, on ne peut pas écrire $A + \alpha$!

Q. 1 Soient \mathbf{u} et \mathbf{v} deux vecteurs de \mathbb{R}^n . Écrire la fonction `ProdSca` permettant de retourner le produit scalaire de ces deux vecteurs noté mathématiquement $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$. \square

L'objectif de la suite de l'exercice est de voir plusieurs manières de programmer le produit d'une matrice par un vecteur. Soient $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^p$ et $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.

Q. 2 a. Rappeler précisément les hypothèses et les formules permettant le calcul de $\mathbf{v} = \mathbb{A}\mathbf{u}$.

b. Écrire la fonction `ProdMatVec` permettant de retourner $\mathbb{A}\mathbf{u}$. \square

Voici quelques notations mathématiques (non standards) que l'on va utiliser. Si $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ alors

- $\mathbb{A}_{:,j}$ correspond au j -ème vecteur colonne de \mathbb{A} .
- $\mathbb{A}_{i,:}$ correspond au i -ème vecteur ligne de \mathbb{A} .

On suppose que l'on dispose des commandes suivantes au niveau algorithmique:

Description	Avec fonction	Instruction simplifiée
Obtenir la j -ème colonne d'une matrice \mathbb{A} avec $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, math. noté $\mathbb{A}_{:,j}$	$\mathbf{u} \leftarrow \text{getMatCol}(\mathbb{A}, j)$	$\mathbf{u} \leftarrow \mathbb{A}(:, j)$
Obtenir la i -ème ligne d'une matrice \mathbb{A} avec $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$, math. noté $\mathbb{A}_{i,:}$	$\mathbf{v} \leftarrow \text{getMatRow}(\mathbb{A}, i)$	$\mathbf{v} \leftarrow \mathbb{A}(i, :)$
Remplacer la j -ème colonne d'une matrice \mathbb{A} par un vecteur $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ avec $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$	$\mathbb{A} \leftarrow \text{setMatCol}(\mathbb{A}, \mathbf{u}, j)$	$\mathbb{A}(:, j) \leftarrow \mathbf{u}$
Remplacer la i -ème ligne d'une matrice \mathbb{A} par un vecteur $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ avec $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$	$\mathbb{A} \leftarrow \text{setMatRow}(\mathbb{A}, \mathbf{v}, j)$	$\mathbb{A}(i, :) \leftarrow \mathbf{v}$.

Table 1: Instructions algorithmiques pour accéder/modifier une ligne ou une colonne d'une matrice $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.

Q. 3 a. Sous les hypothèses de **Q.2** et avec $\mathbf{v} = \mathbb{A}\mathbf{u}$, écrire mathématiquement v_i comme un produit scalaire en utilisant les notations précisées ci-dessus.

b. Écrire la fonction `ProdMatVecFun` permettant de retourner $\mathbb{A}\mathbf{u}$ en utilisant la fonction `ProdSca` et les fonctions de la Table 1 (i.e. sans utiliser les instructions simplifiées).

c. Écrire la fonction `ProdMatVecSim` permettant de retourner $\mathbb{A}\mathbf{u}$ en utilisant la fonction `ProdSca` et les instructions simplifiées de la Table 1 (i.e. sans utiliser les fonctions). \square

Soient $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$.

Q. 4 a. Rappeler précisément les hypothèses et les formules permettant le calcul de $\mathbb{G} = \mathbb{A}\mathbb{B}$.

b. Écrire la fonction `ProdMatMat` permettant de retourner \mathbb{G} . \square

Q. 5 Sous les hypothèses trouvées en **Q.4**, on note $\mathbb{G} = \mathbb{A}\mathbb{B}$.

a. En utilisant les notations mathématiques d'accès aux lignes et colonnes d'une matrice, écrire $\mathbb{G}_{i,j}$ comme un produit scalaire entre un vecteur ligne de \mathbb{A} et un vecteur colonne de \mathbb{B} .

b. Écrire la fonction `ProdMatMatFun1` permettant de retourner \mathbb{G} en utilisant la formule trouvée en **Q.5** a., des fonctions de la Table 1 (i.e. sans utiliser les instructions simplifiées) et la fonction `ProdSca`.

c. Écrire la fonction `ProdMatMatSim1` permettant de retourner \mathbb{G} en utilisant la formule trouvée en **Q.5** a., des instructions simplifiées de la Table 1 et la fonction `ProdSca`. \square

Q. 6 Sous les hypothèses trouvées en **Q.4**, on note $\mathbb{G} = \mathbb{A}\mathbb{B}$.

- a. En utilisant les notations mathématiques d'accès aux lignes et colonnes d'une matrice, écrire $\mathbb{G}_{:,j}$ (j -ème vecteur colonne de \mathbb{G}) comme le produit de la matrice \mathbb{A} par un vecteur colonne de \mathbb{B} .
- b. Ecrire la fonction `ProdMatMatFun2` permettant de retourner \mathbb{G} en utilisant la formule trouvée en **Q.6 a.**, des fonctions de la Table 1 (i.e. sans utiliser les instructions simplifiées) et la fonction `ProdMatVecFun`.
- c. Ecrire la fonction `ProdMatMatSim2` permettant de retourner \mathbb{G} en utilisant la formule trouvée en **Q.6 a.**, des instructions simplifiées de la Table 1 et la fonction `ProdMatVecSim`.

□