Exercices associés au cours *Méthodes Numériques II*
Chapitre 1: *Algorithmique*

version du 21/01/2025 à 10:26:18

1 Numériques

Exercice 1

Soient $m \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}$. Ecrire la fonction algorithmique sum01 permettant de calculer

$$\sum_{k=1}^{m} k \cos\left(\frac{2\pi k}{m} t\right).$$

Exercice 2

Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{R}$. On souhaite calculer

$$\prod_{n=1}^{k} (2n-1)\cos(2kz/n)^k$$

Q. 1 *Ecrire la fonction algorithmique* prod01 *permettant de faire ce calcul en utilisant la fonction puissance* power(x,y) *ou* x^y *correspondant à* x^y. □

Q. 2 *Ecrire la fonction algorithmique* prod02 *permettant de faire ce calcul sans utiliser la fonction puissance* power *ou l'opérateur* ^. *On rappelle que si* $k \in \mathbb{N}$ *alors* $x^k = \prod_{i=1}^{k} x$. □

Exercice 3

Soit la série de Fourier

$$x(t) = \frac{4A}{\pi}\left\{\cos \omega t - \frac{1}{3}\cos 3\omega t + \frac{1}{5}\cos 5\omega t - \frac{1}{7}\cos 7\omega t + \cdots\right\}.$$

Ecrire la fonction SFT permettant de calculer $x_n(t)$ correspondant à la série $x(t)$ tronquée au n-ième terme.

Exercice 4

Soient $(t_i)_{i=0}^{m}$ et $(x_k)_{k=1}^{n}$ des réels. Le réel α est donné par

$$\alpha = \prod_{k=1}^{n} \cos(x_k) \sum_{j=0}^{m} \sin(t_j)\cos\left(\frac{j\pi}{n+1} x_k\right).$$

Q. 1 *a. Quelles sont les données (mathématiques) nécessaires et suffisantes permettant de calculer α? Préciser leurs types et leurs dimensions.*

b. Ecrire la fonction `PS` *permettant de calculer α. Toutes les données (algorithmiques) seront passées en paramètre à la fonction et leur lien avec les données mathématiques sera précisé.*

c. Donner un exemple d'utilisation de cette fonction.

□

Exercice 5

Soient x un réel, m, n, p, q des entiers strictement supérieurs à 1, $\boldsymbol{u} = (u_1, \ldots, u_m)$ un vecteur de $\mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{v} = (v_1, \ldots, v_p)$ un vecteur de $\mathbb{R}^p$ et $\boldsymbol{w} = (w_1, \ldots, w_q)$ un vecteur de $\mathbb{R}^q$.
Le réel y est donné par

$$y = \prod_{i=1}^{m} \left((x + \sin(u_i)) \sum_{k=1}^{n} (k + (x-i)^2) \right)$$

Q. 1 *a. Quelles sont les données nécessaires et suffisantes permettant de calculer y? Préciser les types et les dimensions.*

b. Ecrire la fonction PS *permettant de calculer y. Toutes les données seront passées en paramètre à la fonction.*

c. Donner un exemple d'utilisation de cette fonction.

□

Soit $\boldsymbol{z} = (z_1, \ldots, z_m)$ le vecteur de $\mathbb{R}^m$ défini par

$$z_i = \sum_{k=1}^{p} \left((u_i - k\sin(x)) \prod_{j=1}^{p} (v_k + (x-j)^2) \right), \quad \forall i \in [\![1, m]\!].$$

Q. 2 *a. Quelles sont les données nécessaires et suffisantes permettant de calculer $\boldsymbol{z}$? Préciser les types et les dimensions.*

b. Ecrire la fonction SP *permettant de calculer $\boldsymbol{z}$. Toutes les données seront passées en paramètre à la fonction.*

c. Donner un exemple d'utilisation de cette fonction.

□

Exercice 6

Dans cet exercice les notations suivantes seront utilisées. Si $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ alors

- $\mathbb{A}_{:,j}$ correspond au j-ème vecteur colonne de $\mathbb{A}$ et s'écrit algorithmiquement `A(:,j)`. Si on écrit `v`$\leftarrow$`A(:,j)` alors l'accès aux éléments de `v` s'effectue avec la commande `v(i)`. De plus, au niveau algorithmique, si `w` est un vecteur colonne ou ligne de dimension m, alors `A(:,j)`$\leftarrow$`w` est autorisé et correspond mathématiquement à $\mathbb{A}_{:,j} = \boldsymbol{w}$ ou $\mathbb{A}_{:,j} = \boldsymbol{w}^t$ c'est à dire $\mathbb{A}_{i,j} = \boldsymbol{w}_i$, $\forall i \in [\![1, m]\!]$.
- $\mathbb{A}_{i,:}$ correspond au i-ème vecteur ligne de $\mathbb{A}$ et s'écrit algorithmiquement `A(i,:)` et si on écrit `u`$\leftarrow$`A(i,:)` alors l'accès aux éléments de `u` s'effectue avec la commande `u(j)`. De plus, au niveau algorithmique, si `w` est un vecteur ligne ou colonne de dimension n, alors `A(i,:)`$\leftarrow$`w` est autorisé et correspond mathématiquement à $\mathbb{A}_{i,:} = \boldsymbol{w}$ ou $\mathbb{A}_{i,:} = \boldsymbol{w}^t$ c'est à dire $\mathbb{A}_{i,j} = \boldsymbol{w}_j$, $\forall j \in [\![1, n]\!]$.

Q. 1 *Soient $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Ecrire la fonction* `ProSca` *permettant de retourner le produit scalaire de ces deux vecteurs.* □

Q. 2 *Soient* $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^p$ *et* $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.

a. Rappeler précisement les hypothèses et les formules permettant le calcul de $\boldsymbol{v} = \mathbb{A}\boldsymbol{u}$.

b. Ecrire la fonction `ProMatVec1` *permettant de retourner* $\mathbb{A}\boldsymbol{u}$.

c. Ecrire $\boldsymbol{v}_i$ *comme un produit scalaire en utilisant les notations précisées en début d'exercice.*

d. Ecrire la fonction `ProMatVec2` *permettant de retourner* $\mathbb{A}\boldsymbol{u}$ *en utilisant la fonction* `ProSca`.

□

Q. 3 *Soient* $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ *et* $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$.

a. Rappeler précisement les hypothèses et les formules permettant le calcul de $\mathbb{G} = \mathbb{A}\mathbb{B}$.

b. Ecrire la fonction `ProMatMat1` *permettant de retourner* $\mathbb{G}$.

c. Ecrire $\mathbb{G}_{:,j}$ *(*j*-ème vecteur colonne de* $\mathbb{G}$*) comme un produit matrice vecteur*

d. Ecrire la fonction `ProMatMat2` *permettant de retourner* $\mathbb{G}$ *en utilisant la fonction* `ProMatVec2`.

□

2 Graphiques

Exercice 7

Soient a et b deux réels, $a < b$. On note $(x_i)_{i=0}^{n}$ les $n+1$ points de la discrétisation régulière de l'intervalle $[a, b]$ donnés par $x_i = a + ih$ avec $h = (b - a)/n$.

Q. 1 *Ecrire une fonction* `DisReg` *permettant d'obtenir les* $(n+1)$ *points de la discrétisation régulière de l'intervalle* $[a, b]$. □

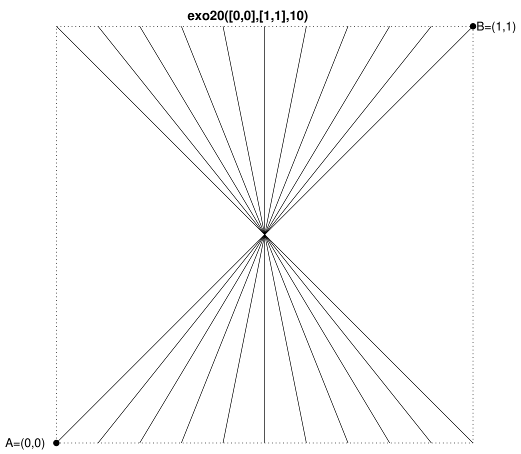
Soient $A = (x_A, y_A)$ et $B = (x_B, y_B)$ deux points du plan tels que $x_A < x_B$ et $y_A < y_B$. Ces deux points permettent de définir le rectangle de sommets (x_A, y_A), (x_B, y_A), (x_B, y_B) et (x_A, y_B).
On suppose que pour tracer le segment $[AB]$ on dispose de la commande

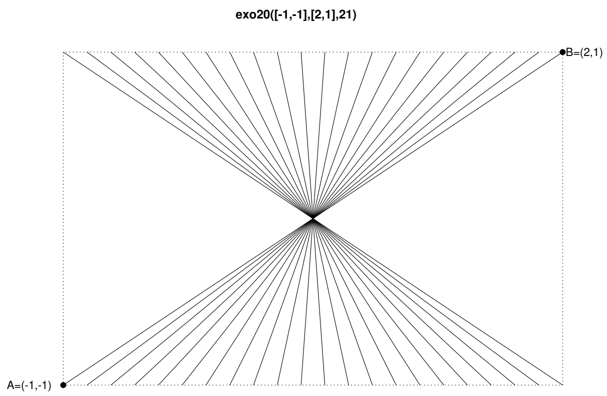
`plot(`$[x_A, x_B]$`,`$[y_A, y_B]$`)`.

Q. 2 *Ecrire une fonction* `exo20` *de paramètres* A, B *et* n *permettant de*

- *représenter les bords du rectangle,*
- *relier les points des bords haut et bas, dont les abscisses sont une discrétisation régulière en* $n+1$ *points, et passant par le centre de symétrie du rectangle.*

Deux exemples d'utilisation de cette fonction sont donnés ci-dessous :



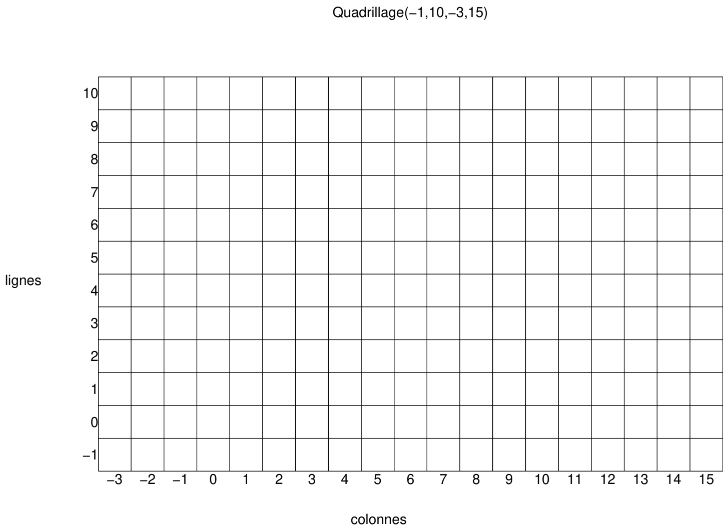


□

Pour les exercices suivants, on dispose d'un quadrillage quelconque généré par la fonction

`quadrillage(imin,imax,jmin,jmax)`

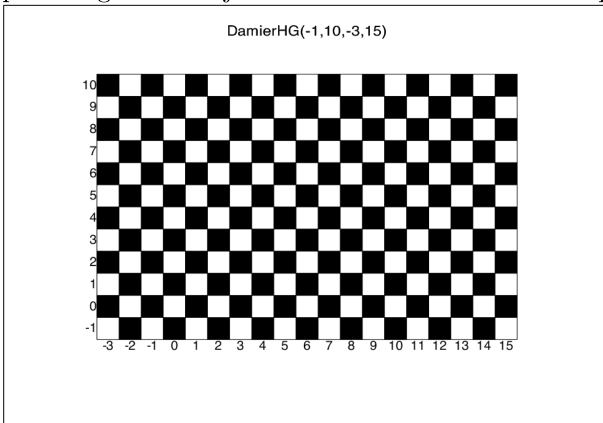
dont voici un exemple d'utilisation

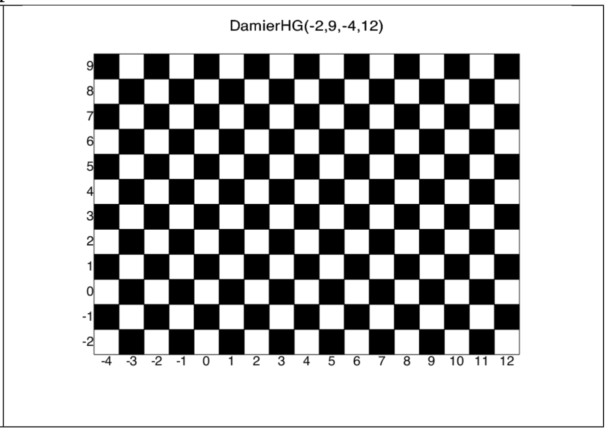


On dispose de plus d'une fonction `black(i,j)` qui dessine un pavé noir en ligne i et colonne j d'un quadrillage.

Exercice 8

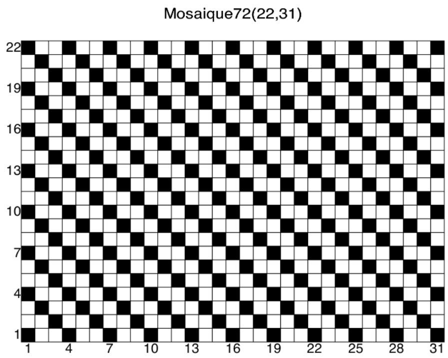
Ecrire la fonction DamierHG(imin,imax,jmin,jmax) permettant de créer une mosaïque sur le quadrillage obtenu par la commande Quadrillage(imin,imax,jmin,jmax) sachant que le pavé en haut à gauche d'un quadrillage doit toujours être noir. Voici deux exemples d'utilisation de cette fonction:

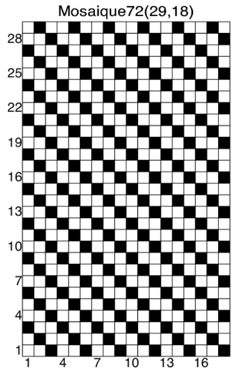




Exercice 9

Q. 1 *Ecrire la fonction* Mosaique72(n,m) *permettant de créer une mosaïque sur le quadrillage* Quadrillage(1,n,1,m) *sachant que la case en ligne* 1 *et colonne* m *est noire. Voici deux exemples d'utilisation de cette fonction:*

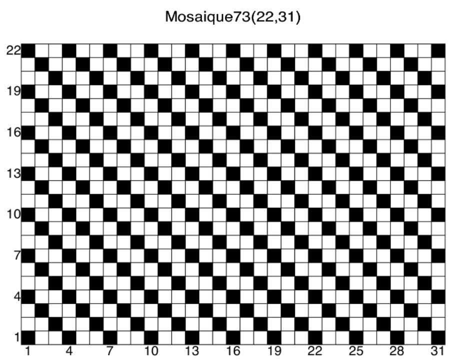


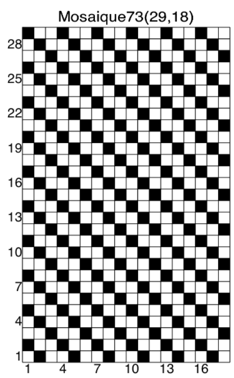


□

Exercice 10

Q. 1 *Ecrire la fonction* Mosaique73(n,m) *permettant de créer une mosaïque sur le quadrillage* Quadrillage(1,n,1,m) *sachant que la case en ligne* n *et colonne* 1 *est noire. Voici deux exemples d'utilisation de cette fonction:*

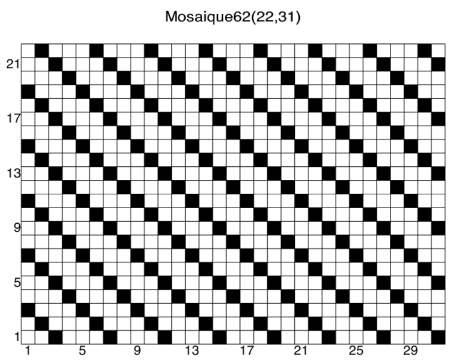


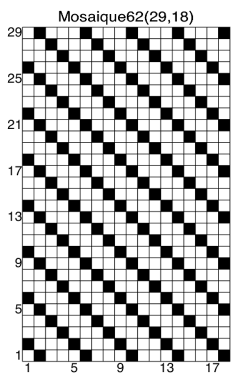


□

Exercice 11

Q. 1 *Ecrire la fonction* Mosaique62(n,m) *permettant de créer une mosaïque sur le quadrillage* Quadrillage(1,n,1,m) *sachant que la case en ligne* 1 *et colonne* m *est noire. Voici deux exemples d'utilisation de cette fonction:*

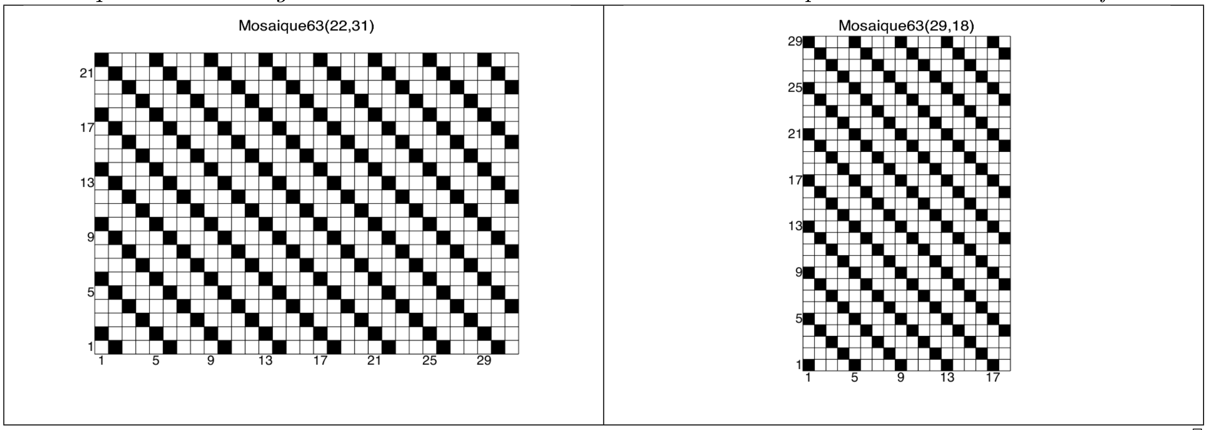




□

Exercice 12

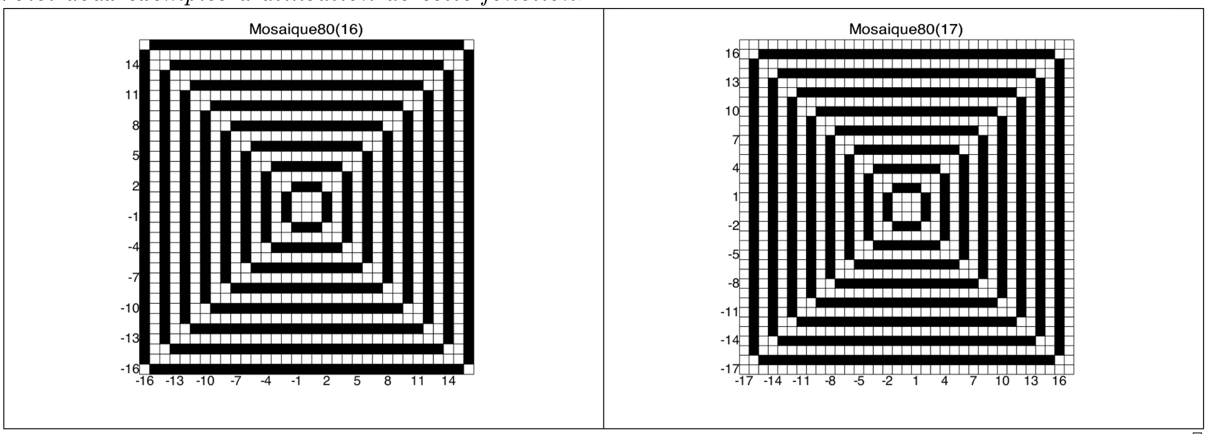
Q. 1 *Ecrire la fonction* Mosaique63(n,m) *permettant de créer une mosaïque sur le quadrillage* Quadrillage(1,n,1,m) *sachant que la case en ligne* n *et colonne* 1 *est noire. Voici deux exemples d'utilisation de cette fonction:*



□

Exercice 13

Q. 1 *Ecrire la fonction* Mosaique80(n) *permettant de créer une mosaïque sur le quadrillage* Quadrillage($-$n,n,$-$n,n) *Voici deux exemples d'utilisation de cette fonction:*



□