Exercices associés au cours *Méthodes Numériques II*
Chapitre 2: *Dérivation numérique*

version du 2025/02/02 à 04:12:23

Exercice 1

Soit $\varphi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

Q. 1 *Montrer que si* $\varphi \in \mathcal{C}^2([a,b];\mathbb{R})$ *alors* $\forall x \in [a,b[$, $\forall h > 0$ *tel que* $(x+h) \in [a,b]$, *on a*

$$\frac{d\varphi}{dx}(x) = \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} + \mathcal{O}(h) \tag{1.1}$$

□

Q. 2 *Montrer que si* $\varphi \in \mathcal{C}^2([a,b];\mathbb{R})$ *alors* $\forall x \in]a,b]$, $\forall h > 0$ *tel que* $(x-h) \in [a,b]$, *on a*

$$\frac{d\varphi}{dx}(x) = \frac{\varphi(x) - \varphi(x-h)}{h} + \mathcal{O}(h) \tag{1.2}$$

□

Q. 3 *Montrer que si* $\varphi \in \mathcal{C}^3([a,b];\mathbb{R})$ *alors* $\forall x \in]a,b[$, $\forall h > 0$ *tel que* $(x+h) \in [a,b]$ *et* $(x-h) \in [a,b]$, *on a*

$$\frac{d\varphi}{dx}(x) = \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x-h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \tag{1.3}$$

□

Q. 4 *Montrer que si* $\varphi \in \mathcal{C}^4([a,b];\mathbb{R})$ *alors* $\forall x \in]a,b[$, $\forall h > 0$ *tel que* $(x+h) \in [a,b]$ *et* $(x-h) \in [a,b]$, *on a*

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}(x) = \frac{\varphi(x+h) - 2\varphi(x) + \varphi(x-h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2) \tag{1.4}$$

□

Exercice 2

Soit $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction suffisament régulière, $x \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}^{+*}$.

Q. 1 *Montrer que*

$$\frac{d\varphi}{dx}(x) = \frac{-3\varphi(x) + 4\varphi(x+h) - \varphi(x+2h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \tag{2.5}$$

□

Q. 2 *Montrer que*

$$\frac{d\varphi}{dx}(x) = \frac{3\varphi(x) - 4\varphi(x-h) + \varphi(x-2h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \tag{2.6}$$

□

Exercice 3

Soit $f \in \mathcal{C}^3([a,b];\mathbb{R})$. On note t^n, $n \in [\![0,N]\!]$, une discrétisation **régulière** de $[a,b]$ de pas h. On note $\boldsymbol{F} \in \mathbb{R}^{N+1}$ le vecteur défini par $F_{n+1} = f(t^n)$, $\forall n \in [\![0,N]\!]$.

Q. 1 *a. Déterminer en fonction de h et $\boldsymbol{F}$, un vecteur $\boldsymbol{V} \in \mathbb{R}^{N+1}$ vérifiant*

$$V_{n+1} = f'(t^n) + \mathcal{O}(h), \quad \forall n \in [\![0,N]\!].$$

b. Ecrire une fonction algorithmique, nommée Derive1Ordre1*, permettant, à partir du vecteur $\boldsymbol{F}$ et de la discrétisation régulière, de calculer le vecteur $\boldsymbol{V}$ précédent.*

$\square$

Q. 2 *a. Connaissant uniquement h et le vecteur $\boldsymbol{F}$, déterminer un vecteur $\boldsymbol{W} \in \mathbb{R}^{N+1}$ vérifiant*

$$\boldsymbol{W}_n = f'(t^n) + \mathcal{O}(h^2), \quad \forall n \in [\![0,N]\!]$$

b. Ecrire une fonction algorithmique, nommée Derive1Ordre2*, permettant, à partir du vecteur $\boldsymbol{F}$ et de la discrétisation régulière, de calculer le vecteur $\boldsymbol{W}$ précédent.*

$\square$

Exercice 4

On suppose écrites les fonctions Matlab/Octave Derive1Order1 et Derive1Order2 correspondant aux fonctions algorithmiques de l'exercice 3. Leurs syntaxes sont les suivantes:

V=Derive1Ordre1(h,F) et W=Derive1Ordre2(h,F)

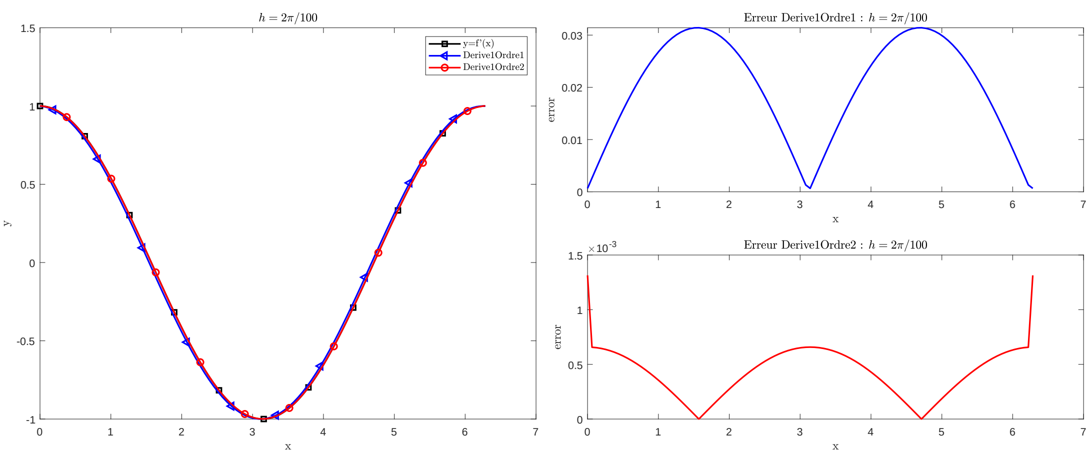
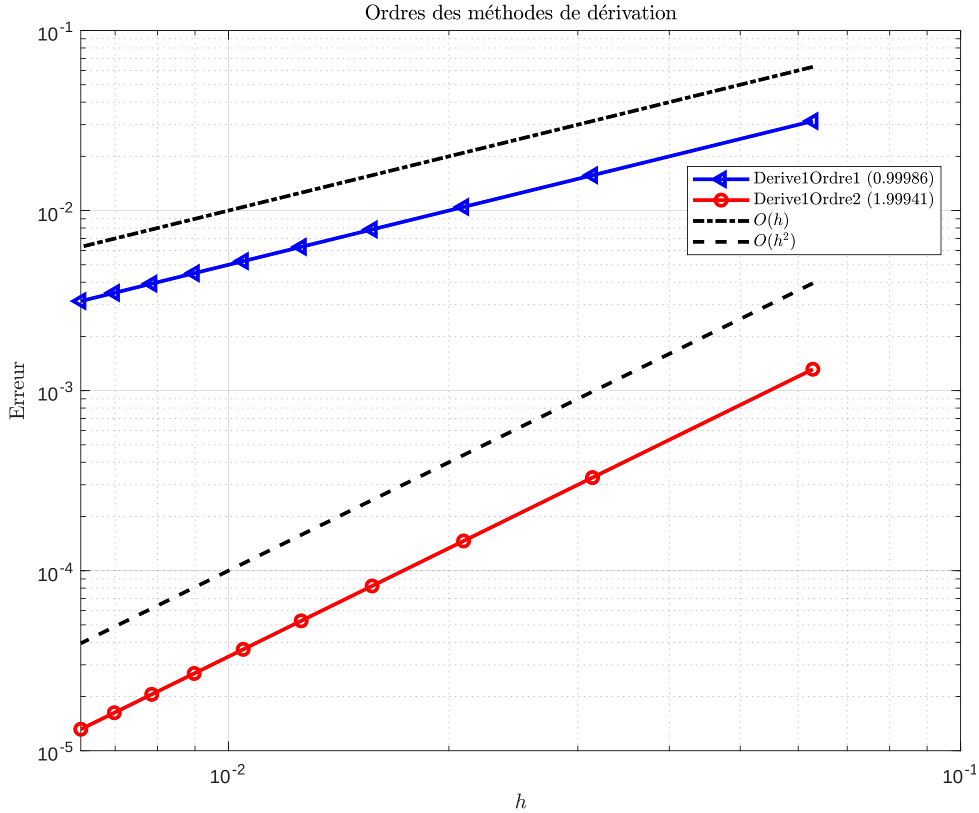


Figure 1: Avec $f(x) = sin(x)$, $a = 0$, $b = 2\pi$, $N = 100$, à gauche, les différentes dérivées, à droite les erreurs commises par les deux fonctions.

Q. 1 *Ecrire un programme Matlab/Octave permettant de reproduire ces deux graphiques.* $\square$

Exercice 5

Voici une figure mettant en évidence l'ordre des méthodes utilisées dans les fonctions Derive1Order1 et Derive1Order2 de l'exercice 3.



On suppose écrites les fonctions Matlab/Octave Derive1Order1 et Derive1Order2 correspondant aux fonctions algorithmiques de l'exercice 3. Leurs syntaxes sont les suivantes:

V=Derive1Ordre1(h,F) et W=Derive1Ordre2(h,F)

Q. 1 *a. Ecrire un programme Matlab/Octave permettant de calculer l'ensemble des données nécessaires à la représentation graphique de l'ordre des deux méthodes (voir figure).*

b. A l'aide de ces données, calculer numériquement l'ordre des deux méthodes.

□

Les commandes Matlab/Octave permettant de représenter des données en échelles logarithmique sont loglog, semilogx et semilogy. Elles s'utilisent globalement comme la fonction plot.

Q. 2 *Ajouter au programme précédent le code permettant de reproduire la figure.* □