

# Exercices associés au cours *Méthodes Numériques II*

## Chapitre 2: *Dérivation numérique*

version du 2025/02/02 à 04:18:39

### EXERCICE 1

Soit  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction.

**Q. 1** Montrer que si  $\varphi \in \mathcal{C}^2([a, b]; \mathbb{R})$  alors  $\forall x \in [a, b], \forall h > 0$  tel que  $(x + h) \in [a, b]$ , on a

$$\frac{d\varphi}{dx}(x) = \frac{\varphi(x + h) - \varphi(x)}{h} + \mathcal{O}(h) \quad (1.1)$$

□

**R. 1** On rappelle le développement de Taylor à l'ordre  $r$  d'une fonction  $f \in \mathcal{C}^{r+1}([a, b]; \mathbb{R})$   
 $\forall x \in [a, b], \forall \square \in \mathbb{R}^*$  vérifiant  $(x + \square) \in [a, b]$ ,

$$f(x + \square) = f(x) + \sum_{k=1}^r \frac{\square^k}{k!} f^{(k)}(x) + \mathcal{O}(\square^{r+1}) \quad (1.2)$$

où  $f^{(k)}(x) = \frac{d^k f}{dx^k}(x)$ .

On peut ici utiliser un développement de Taylor à l'ordre  $r = 1$  de  $\varphi$  car  $\varphi \in \mathcal{C}^2([a, b]; \mathbb{R})$  avec  $\square = h$  dans (1.2).

Soient  $x \in [a, b]$  et  $h \in \mathbb{R}^{*+}$ , tels que  $(x + h) \in [a, b]$  (donc nécessairement  $x \in [a, b]$ ) on a

$$\varphi(x + h) = \varphi(x) + h \varphi^{(1)}(x) + \mathcal{O}(h^2)$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \varphi^{(1)}(x) &= \frac{\varphi(x + h) - \varphi(x)}{h} - \frac{1}{h} \mathcal{O}(h^2) \\ &= \frac{\varphi(x + h) - \varphi(x)}{h} + \mathcal{O}(h). \end{aligned}$$

**Q. 2** Montrer que si  $\varphi \in \mathcal{C}^2([a, b]; \mathbb{R})$  alors  $\forall x \in [a, b], \forall h > 0$  tel que  $(x - h) \in [a, b]$ , on a

$$\frac{d\varphi}{dx}(x) = \frac{\varphi(x) - \varphi(x - h)}{h} + \mathcal{O}(h) \quad (1.3)$$

□

**R. 2** On peut ici utiliser un développement de Taylor à l'ordre  $r = 1$  de  $\varphi$  car  $\varphi \in \mathcal{C}^2([a, b]; \mathbb{R})$  avec  $\square = -h$  dans (1.2).

On peut ici utiliser un développement de Taylor à l'ordre 2 car  $\varphi \in \mathcal{C}^2([a, b]; \mathbb{R})$ .

Soient  $x \in [a, b]$  et  $h \in \mathbb{R}^{*+}$ , tels que  $(x - h) \in [a, b]$  (donc nécessairement  $x \in [a, b]$ ) on a

$$\varphi(x - h) = \varphi(x) - h \varphi^{(1)}(x) + \mathcal{O}(h^2)$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \varphi^{(1)}(x) &= \frac{\varphi(x) - \varphi(x - h)}{h} + \frac{1}{h} \mathcal{O}(h^2) \\ &= \frac{\varphi(x) - \varphi(x - h)}{h} + \mathcal{O}(h). \end{aligned}$$

---

**Q. 3** Montrer que si  $\varphi \in \mathcal{C}^3([a, b]; \mathbb{R})$  alors  $\forall x \in ]a, b[, \forall h > 0$  tel que  $(x + h) \in [a, b]$  et  $(x - h) \in [a, b]$ , on a

$$\frac{d\varphi}{dx}(x) = \frac{\varphi(x + h) - \varphi(x - h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \quad (1.4)$$

□

---

**R. 3** On peut ici utiliser un développement de Taylor à l'ordre  $r = 2$  de  $\varphi$  car  $\varphi \in \mathcal{C}^3([a, b]; \mathbb{R})$ . Dans la formule (1.4), les termes  $\varphi(x + h)$ ,  $\varphi(x - h)$  apparaissent. Ceci suggère d'utiliser deux développements de Taylor, l'un en  $x + h$  et l'autre en  $x - h$ . Soient  $x \in [a, b]$  et  $h \in \mathbb{R}^{*+}$ , tels que  $(x + h) \in [a, b]$  et  $(x - h) \in [a, b]$  (donc nécessairement  $x \in ]a, b[$ ). On a alors

$$\begin{aligned} \varphi(x + h) &= \varphi(x) + h\varphi^{(1)}(x) + \frac{h^2}{2}\varphi^{(2)}(x) + \mathcal{O}(h^3), \\ \varphi(x - h) &= \varphi(x) - h\varphi^{(1)}(x) + \frac{h^2}{2}\varphi^{(2)}(x) + \mathcal{O}(h^3). \end{aligned}$$

**Remarque.** Attention ici, il faut bien voir que les  $\mathcal{O}$  dans les deux formules ne sont mathématiquement pas forcément identiques! En effet, en revenant aux développements de Taylor sans  $\mathcal{O}$ , pour la formule en  $x + h$ , il existe  $\xi_+ \in ]x, x + h[$  tel que

$$\mathcal{O}(h^3) = \frac{h^3}{3!}\varphi^{(3)}(\xi_+)$$

et pour la formule en  $x - h$ , il existe  $\xi_- \in ]x - h, x[$  tel que

$$\mathcal{O}(h^3) = -\frac{h^3}{3!}\varphi^{(3)}(\xi_-).$$

On effectuant la différence entre ces deux équations on obtient:

$$\varphi(x + h) - \varphi(x - h) = 2h\varphi^{(1)}(x) + \mathcal{O}(h^3)$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \varphi^{(1)}(x) &= \frac{\varphi(x + h) - \varphi(x - h)}{2h} + \frac{1}{2h}\mathcal{O}(h^3) \\ &= \frac{\varphi(x + h) - \varphi(x - h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \end{aligned}$$

---

**Q. 4** Montrer que si  $\varphi \in \mathcal{C}^4([a, b]; \mathbb{R})$  alors  $\forall x \in ]a, b[, \forall h > 0$  tel que  $(x + h) \in [a, b]$  et  $(x - h) \in [a, b]$ , on a

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}(x) = \frac{\varphi(x + h) - 2\varphi(x) + \varphi(x - h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2) \quad (1.5)$$

□

---

**R. 4** On peut ici utiliser un développement de Taylor à l'ordre  $r = 3$  de  $\varphi$  car  $\varphi \in \mathcal{C}^4([a, b]; \mathbb{R})$ . Dans la formule (1.5), les termes  $\varphi(x + h)$ ,  $\varphi(x - h)$  apparaissent. Ceci suggère d'utiliser deux développements de Taylor, l'un en  $x + h$  et l'autre en  $x - h$ . Soient  $x \in [a, b]$  et  $h \in \mathbb{R}^{*+}$ , tels que  $(x + h) \in [a, b]$  et  $(x - h) \in [a, b]$  (donc nécessairement  $x \in ]a, b[$ ). On a alors

$$\begin{aligned} \varphi(x + h) &= \varphi(x) + h\varphi^{(1)}(x) + \frac{h^2}{2}\varphi^{(2)}(x) + \frac{h^3}{3!}\varphi^{(3)}(x) + \mathcal{O}(h^4), \\ \varphi(x - h) &= \varphi(x) - h\varphi^{(1)}(x) + \frac{h^2}{2}\varphi^{(2)}(x) - \frac{h^3}{3!}\varphi^{(3)}(x) + \mathcal{O}(h^4). \end{aligned}$$

On effectuant la somme entre ces deux équations on obtient:

$$\varphi(x+h) + \varphi(x-h) = 2\varphi(x) + h^2 \varphi^{(2)}(x) + \mathcal{O}(h^4)$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}\varphi^{(2)}(x) &= \frac{\varphi(x+h) - 2\varphi(x) + \varphi(x-h)}{h^2} + \frac{1}{h^2} \mathcal{O}(h^4) \\ &= \frac{\varphi(x+h) - 2\varphi(x) + \varphi(x-h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2)\end{aligned}$$

## EXERCICE 2

Soit  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction suffisamment régulière,  $x \in \mathbb{R}$  et  $h \in \mathbb{R}^{+*}$ .

**Q. 1** Montrer que

$$\frac{d\varphi}{dx}(x) = \frac{-3\varphi(x) + 4\varphi(x+h) - \varphi(x+2h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \quad (2.6)$$

□

**R. 1** Soit  $\varphi$  une fonction suffisamment régulière et  $h > 0$

Pour cela, on écrit les deux développements de Taylor en  $x+h$  et  $x+2h$ .

Il existe  $\xi_1^+ \in ]x, x+h[$  tel que

$$\varphi(x+h) = \varphi(x) + h \frac{d\varphi}{dx}(x) + \frac{h^2}{2!} \frac{d^2\varphi}{dx^2}(x) + \frac{h^3}{3!} \frac{d^3\varphi}{dx^3}(\xi_1^+) \quad (2.7)$$

et Il existe  $\xi_2^+ \in ]x, x+2h[$  tel que

$$\varphi(x+2h) = \varphi(x) + (2h) \frac{d\varphi}{dx}(x) + \frac{(2h)^2}{2!} \frac{d^2\varphi}{dx^2}(x) + \frac{(2h)^3}{3!} \frac{d^3\varphi}{dx^3}(\xi_2^+) \quad (2.8)$$

L'objectif est d'obtenir, par une combinaison linéaire entre ces deux formules, une nouvelle équation ne comportant plus de termes en  $\frac{d^2\varphi}{dx^2}$ . En effectuant  $4 \times (2.7) - (2.8)$  on obtient

$$4\varphi(x+h) - \varphi(x+2h) = 3\varphi(x) + 2h \frac{d\varphi}{dx}(x) + 4 \frac{h^3}{3!} \frac{d^3\varphi}{dx^3}(\xi_1^+) - \frac{(2h)^3}{3!} \frac{d^3\varphi}{dx^3}(\xi_2^+)$$

On en déduit

$$\frac{d\varphi}{dx}(x) = \frac{-3\varphi(x) + 4\varphi(x+h) - \varphi(x+2h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2)$$

**Q. 2** Montrer que

$$\frac{d\varphi}{dx}(x) = \frac{3\varphi(x) - 4\varphi(x-h) + \varphi(x-2h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \quad (2.9)$$

□

**R. 2** Soit  $\varphi$  une fonction suffisamment régulière et  $h > 0$ .

Pour celà, on écrit les deux développements de Taylor en  $x - h$  et  $x - 2h$ .

Il existe  $\xi_1^- \in ]x - h, x[$  tel que

$$\varphi(x - h) = \varphi(x) - h \frac{d\varphi}{dx}(x) + \frac{(-h)^2}{2!} \frac{d^2\varphi}{dx^2}(x) + \frac{(-h)^3}{3!} \frac{d^3\varphi}{dx^3}(\xi_1^-) \quad (2.10)$$

et Il existe  $\xi_2^- \in ]x - 2h, x[$  tel que

$$\varphi(x - 2h) = \varphi(x) + (-2h) \frac{d\varphi}{dx}(x) + \frac{(-2h)^2}{2!} \frac{d^2\varphi}{dx^2}(x) + \frac{(-2h)^3}{3!} \frac{d^3\varphi}{dx^3}(\xi_2^+) \quad (2.11)$$

L'objectif est d'obtenir, par une combinaison linéaire entre ces deux formules, une nouvelle équation ne comportant plus de termes en  $\frac{d^2\varphi}{dx^2}$ . En effectuant  $4 \times (2.10) - (2.11)$  on obtient

$$4\varphi(x - h) - \varphi(x - 2h) = 3\varphi(x) - 2h \frac{d\varphi}{dx}(x) + 4 \frac{(-h)^3}{3!} \frac{d^3\varphi}{dx^3}(\xi_1^-) - \frac{(-2h)^3}{3!} \frac{d^3\varphi}{dx^3}(\xi_2^-)$$

On en déduit

$$\frac{d\varphi}{dx}(x) = \frac{3\varphi(x) - 4\varphi(x - h) + \varphi(x - 2h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2)$$

---

### EXERCICE 3

Soit  $f \in \mathcal{C}^3([a, b]; \mathbb{R})$ . On note  $t^n$ ,  $n \in \llbracket 0, N \rrbracket$ , une discrétisation **régulière** de  $[a, b]$  de pas  $h$ . On note  $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{N+1}$  le vecteur défini par  $F_{n+1} = f(t^n)$ ,  $\forall n \in \llbracket 0, N \rrbracket$ .

**Q. 1** a. Déterminer en fonction de  $h$  et  $\mathbf{F}$ , un vecteur  $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{N+1}$  vérifiant

$$V_{n+1} = f'(t^n) + \mathcal{O}(h), \quad \forall n \in \llbracket 0, N \rrbracket.$$

b. Ecrire une fonction algorithmique, nommée `Derive1Ordre1`, permettant, à partir du vecteur  $\mathbf{F}$  et de la discrétisation régulière, de calculer le vecteur  $\mathbf{V}$  précédent. □

**R. 1** a. On a  $h = (b - a)/N$  et  $t^n = a + nh$ ,  $\forall n \in \llbracket 0, N \rrbracket$ . Par la formule de Taylor, on obtient respectivement les formules progressives et régressives d'ordre 1 suivantes (voir Lemme ??)

$$\frac{f(t+h) - f(t)}{h} = f'(t) + \mathcal{O}(h) \quad \text{et} \quad \frac{f(t) - f(t-h)}{h} = f'(t) + \mathcal{O}(h).$$

On va utiliser ces formules en  $t = t^n$ . On note que la formule progressive n'est pas utilisable en  $t = t^N$  (car  $t^N + h = b + h \notin [a, b]!$ ) et que la formule régressive n'est pas utilisable en  $t = t^0$  (car  $t^0 - h = a - h \notin [a, b]!$ ). Plus précisément, on a

$$\frac{f(t^{n+1}) - f(t^n)}{h} = f'(t^n) + \mathcal{O}(h), \quad \forall n \in \llbracket 0, N \rrbracket, \quad (3.12)$$

$$\frac{f(t^n) - f(t^{n-1})}{h} = f'(t^n) + \mathcal{O}(h), \quad \forall n \in \llbracket 0, N \rrbracket \quad (3.13)$$

On peut alors construire le vecteur  $\mathbf{V}$  en prenant

$$V_1 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f(t^1) - f(t^0)}{h} = f'(t^0) + \mathcal{O}(h), \quad \text{formule progressive (3.12) avec } n = 0$$

$$V_{N+1} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f(t^N) - f(t^{N-1})}{h} = f'(t^N) + \mathcal{O}(h), \quad \text{formule régressive (3.13) avec } n = N$$

et pour les points strictement intérieurs les deux formules sont possible :

$$V_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f(t^{n+1}) - f(t^n)}{h} = f'(t^n) + \mathcal{O}(h), \quad \text{formule progressive (3.12) avec } n \in \llbracket 0, N \rrbracket$$

$$V_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f(t^n) - f(t^{n-1})}{h} = f'(t^n) + \mathcal{O}(h), \quad \text{formule régressive (3.13) avec } n \in \llbracket 0, N \rrbracket$$

En choisissant par exemple la formule progressive pour les points intérieurs, on obtient en fonction de  $\mathbf{F}$  et  $h$

$$\begin{aligned} V_1 &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{F_2 - F_1}{h} &&= f'(t^0) + \mathcal{O}(h) \\ \forall n \in \llbracket 0, N \rrbracket, V_n &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{F_{n+1} - F_n}{h} &&= f'(t^n) + \mathcal{O}(h) \\ V_{N+1} &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{F_{N+1} - F_N}{h} &&= f'(t^N) + \mathcal{O}(h). \end{aligned}$$

b. On représente tout d'abord les vecteurs  $\mathbf{F}$  et  $\mathbf{V}$  en Figure 1.

<b>F</b>	$f(t^0)$	$f(t^1)$	$\dots$	$f(t^{n-1})$	$\dots$	$f(t^{N-1})$	$f(t^N)$
	<b>F(1)</b>	<b>F(2)</b>		<b>F(n)</b>		<b>F(N)</b>	<b>F(N+1)</b>
<b>V</b>	$f'(t^0)$ + $\mathcal{O}(h)$	$f'(t^1)$ + $\mathcal{O}(h)$	$\dots$	$f'(t^{n-1})$ + $\mathcal{O}(h)$	$\dots$	$f'(t^{N-1})$ + $\mathcal{O}(h)$	$f'(t^N)$ + $\mathcal{O}(h)$
	<b>V(1)</b>	<b>V(2)</b>		<b>V(n)</b>		<b>V(N)</b>	<b>V(N+1)</b>

**Figure 1:** Représentation mémoire du vecteur  $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{N+1}$  et du vecteur  $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{N+1}$ .

En utilisant les formules trouvées précédemment, la fonction algorithmique peut s'écrire sous la forme :

---

**Algorithme 1** Calcul numérique de dérivées premières d'ordre 1 d'une fonction  $f$  définie sur un intervalle en utilisant uniquement les valeurs de  $f$  aux points  $(t^n)_{n=0}^N$  d'une discrétisation régulière de cet intervalle. Les approximations sont calculées en tous les points de la discrétisation.

---

**Données :**  $\mathbf{F}$  : vecteur de  $\mathbb{R}^{N+1}$  tel que  
 $F_{n+1} = f(t^n), \forall n \in \llbracket 0, N \rrbracket$ .  
 $h$  : nombre réel strictement positif.

**Résultat :**  $\mathbf{V}$  : vecteur de  $\mathbb{R}^{N+1}$  tel que  
 $V_{n+1} = f'(t^n) + \mathcal{O}(h), \forall n \in \llbracket 0, N \rrbracket$ .

---

```

1: Fonction  $\mathbf{V} \leftarrow \text{Derive1Ordre1}(h, \mathbf{F})$ 
2:    $V(1) \leftarrow (F(2) - F(1))/h$ 
3:   Pour  $n \leftarrow 2$  à  $N$  faire
4:      $V(n) \leftarrow (F(n+1) - F(n))/h$ 
5:   Fin Pour
6:    $V(N+1) \leftarrow (F(N+1) - F(N))/h$ 
7: Fin Fonction

```

---

D'autres façons de présenter le problème sont possibles mais les données peuvent différer de celles de l'énoncé. Par exemple une autre fonction algorithmique pourrait être

---

**Algorithme 2** Approximations d'ordre 1 de dérivées premières d'une fonction  $f$  définie sur un intervalle  $[a, b]$  en utilisant uniquement les valeurs de  $f$  aux points  $(t^n)_{n=0}^N$  d'une discrétisation régulière de cet intervalle. Les approximations sont calculées en tous les points de la discrétisation.

---

**Données :**  $f$  :  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$   
 $a, b$  : deux réels,  $a < b$ ,  
 $N$  : nombre de pas de discrétisation

**Résultat :**  $\mathbf{V}$  : vecteur de  $\mathbb{R}^{N+1}$  tel que  $V_{n+1} = f'(t^n) + \mathcal{O}(h)$   
avec  $(t^n)_{n=0}^N$  discrétisation régulière de  $[a, b]$ .

---

```

1: Fonction  $\mathbf{V} \leftarrow \text{DeriveOrdre1-v1}(f, a, b, N)$ 
2:    $t \leftarrow \text{DisReg}(a, b, N)$  ▷ fonction retournant la discrétisation régulière...
3:    $h \leftarrow (b - a)/N$ 
4:    $V(1) \leftarrow (f(t(2)) - f(t(1)))/h$ 
5:   Pour  $n \leftarrow 2$  à  $N$  faire
6:      $V(n) \leftarrow (f(t(n+1)) - f(t(n)))/h$ 
7:   Fin Pour
8:    $V(N+1) \leftarrow (f(t(N+1)) - f(t(N)))/h$ 
9: Fin Fonction

```

---

**Q. 2** a. Connaissant uniquement  $h$  et le vecteur  $\mathbf{F}$ , déterminer un vecteur  $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{N+1}$  vérifiant

$$\mathbf{W}_n = f'(t^n) + \mathcal{O}(h^2), \quad \forall n \in \llbracket 0, N \rrbracket$$

b. Ecrire une fonction algorithmique, nommée `Derive1Ordre2`, permettant, à partir du vecteur  $\mathbf{F}$  et de la discrétisation régulière, de calculer le vecteur  $\mathbf{W}$  précédent. □

**R. 2** a. Du lemme ??, on a la formule centrée d'ordre 2

$$\frac{f(t+h) - f(t-h)}{2h} = f'(t) + \mathcal{O}(h^2).$$

On va utiliser cette formule en  $t = t^n$ . On note que la formule n'est pas utilisable en  $t = t^N = b$  et  $t = t^0 = a$ . On obtient

$$f'(t^n) = \frac{f(t^{n+1}) - f(t^{n-1})}{2h} + \mathcal{O}(h^2), \quad \forall n \in \llbracket 0, N \rrbracket. \quad (3.14)$$

Il reste donc à établir une formule *progressive* en  $t^0$  d'ordre 2 (i.e. une formule utilisant les points  $t^0, t^1, t^2, \dots$ ) et une formule *régressive* en  $t^N$  d'ordre 2 (i.e. une formule utilisant les points  $t^N, t^{N-1}, t^{N-2}, \dots$ ).

De manière générique pour établir une formule *progressive* en  $t$  d'ordre 2 approchant  $f'(t)$ , on écrit les deux formules de Taylor aux points  $t+h$  et  $t+2h$ .

- En  $t+h$  on a

$$f(t+h) = f(t) + hf'(t) + \frac{h^2}{2!} f^{(2)}(t) + \mathcal{O}(h^3). \quad (3.15)$$

Plus précisément, on a l'existence d'un  $\xi_1 \in ]t, t+h[$  tel que l'on peut remplacer le  $\mathcal{O}(h^3)$  de (3.15) par  $\frac{h^3}{3!} f^{(3)}(\xi_1)$ .

- En  $t+2h$  on a,

$$f(t+2h) = f(t) + (2h)f'(t) + \frac{(2h)^2}{2!} f^{(2)}(t) + \mathcal{O}(h^3). \quad (3.16)$$

Plus précisément, on a l'existence d'un  $\xi_2 \in ]t, t+2h[$  tel que l'on peut remplacer le  $\mathcal{O}(h^3)$  de (3.15) par  $\frac{(2h)^3}{3!} f^{(3)}(\xi_2)$ .

On va utiliser les formules de Taylor avec les restes explicites mais il est tout à fait possible d'utiliser celles avec les restes sous forme de  $\mathcal{O}(h^3)$ .

L'objectif étant d'obtenir une formule d'ordre 2 en  $t$  pour approcher  $f'(t)$ , on va éliminer les termes en  $f^{(2)}(t)$  en effectuant la combinaison  $4 \times (3.15) - (3.16)$ .

On obtient alors

$$4f(t+h) - f(t+2h) = 3f(t) + 2hf'(t) + 4\frac{h^3}{3!} f^{(3)}(\xi_1) - \frac{(2h)^3}{3!} f^{(3)}(\xi_2)$$

et donc

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{-3f(t) + 4f(t+h) - f(t+2h)}{2h} - 4\frac{h^2}{3!} f^{(3)}(\xi_1) + \frac{2^3 h^2}{3!} f^{(3)}(\xi_2) \\ &= \frac{-3f(t) + 4f(t+h) - f(t+2h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \end{aligned}$$

Cette dernière formule permet alors l'obtention d'une formule d'ordre 2 en  $t = t^0 = a$  :

$$f'(t^0) = \frac{-3f(t^0) + 4f(t^1) - f(t^2)}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \quad (3.17)$$

De la même manière pour établir une formule *régressive* en  $t$  d'ordre 2 approchant  $f'(t)$ , on écrit les deux formules de Taylor aux points  $t-h$  et  $t-2h$  :

- En  $t - h$  on a

$$f(t - h) = f(t) + (-h)f'(t) + \frac{(-h)^2}{2!} f^{(2)}(t) + \mathcal{O}(h^3), \quad (3.18)$$

- En  $t - 2h$  on a

$$f(t - 2h) = f(t) + (-2h)f'(t) + \frac{(-2h)^2}{2!} f^{(2)}(t) + \mathcal{O}(h^3), \quad (3.19)$$

L'objectif étant d'obtenir une formule d'ordre 2 en  $t$  pour approcher  $f'(t)$ , on va éliminer les termes en  $f^{(2)}(t)$  en effectuant la combinaison  $4 \times (3.18) - (3.19)$ . On obtient alors

$$4f(t - h) - f(t - 2h) = 3f(t) - 2hf'(t) + \mathcal{O}(h^3)$$

car toute combinaison de  $\mathcal{O}(h^3)$  reste en  $\mathcal{O}(h^3)$ . On obtient donc

$$f'(t) = \frac{3f(t) - 4f(t - h) + f(t - 2h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2).$$

Cette dernière formule permet alors l'obtention d'une formule d'ordre 2 en  $t = t^N = b$  :

$$f'(t^N) = \frac{3f(t^N) - 4f(t^{N-1}) + f(t^{N-2})}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \quad (3.20)$$

On peut alors construire le vecteur  $\mathbf{W}$  en utilisant les formules (3.14), (3.17) et (3.20) :

$$\begin{aligned} W_1 &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{-3f(t^0) + 4f(t^1) - f(t^2)}{2h} = f'(t^0) + \mathcal{O}(h^2), & \text{formule progressive (3.17)} \\ W_{N+1} &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{3f(t^N) - 4f(t^{N-1}) + f(t^{N-2})}{2h} = f'(t^N) + \mathcal{O}(h^2), & \text{formule régressive (3.20)} \end{aligned}$$

et pour les points strictement intérieurs

$$W_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f(t^{n+1}) - f(t^{n-1})}{2h} = f'(t^n) + \mathcal{O}(h^2), \quad \text{formule centrée (3.14) avec } n \in \llbracket 0, N \llbracket$$

On obtient alors en fonction de  $\mathbf{F}$  et  $h$

$$\begin{aligned} W_1 &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{-3F_1 + 4F_2 - F_3}{2h} = f'(t^0) + \mathcal{O}(h^2) \\ \forall n \in \llbracket 0, N \llbracket, W_n &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{F_{n+1} - F_{n-1}}{2h} = f'(t^n) + \mathcal{O}(h^2) \\ W_{N+1} &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{3F_{N+1} - 4F_N + F_{N-1}}{2h} = f'(t^N) + \mathcal{O}(h). \end{aligned}$$

b. On représente tout d'abord les vecteurs  $\mathbf{F}$  et  $\mathbf{W}$  en Figure 2.

$\mathbf{F}$	$f(t^0)$	$f(t^1)$	$\dots$	$f(t^{n-1})$	$\dots$	$f(t^{N-1})$	$f(t^N)$
	$\mathbf{F}(1)$	$\mathbf{F}(2)$		$\mathbf{F}(n)$		$\mathbf{F}(N)$	$\mathbf{F}(N+1)$
$\mathbf{W}$	$f'(t^0)$ + $\mathcal{O}(h^2)$	$f'(t^1)$ + $\mathcal{O}(h^2)$	$\dots$	$f'(t^{n-1})$ + $\mathcal{O}(h^2)$	$\dots$	$f'(t^{N-1})$ + $\mathcal{O}(h^2)$	$f'(t^N)$ + $\mathcal{O}(h^2)$
	$\mathbf{W}(1)$	$\mathbf{W}(2)$		$\mathbf{W}(n)$		$\mathbf{W}(N)$	$\mathbf{W}(N+1)$

**Figure 2:** Représentation mémoire du vecteur  $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{N+1}$  et du vecteur  $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{N+1}$ .

En utilisant les formules trouvées précédemment, la fonction algorithmique peut s'écrire sous la forme :

---

**Algorithme 3** Approximations d'ordre 2 de dérivées premières d'une fonction  $f$  définie sur un intervalle en utilisant uniquement les valeurs de  $f$  aux points  $(t^n)_{n=0}^N$  d'une discrétisation régulière de cet intervalle. Les approximations sont calculées en tous les points de la discrétisation.

---

**Données :**  $\mathbf{F}$  : vecteur de  $\mathbb{R}^{N+1}$  tel que  
 $F_{n+1} = f(t^n), \forall n \in \llbracket 0, N \rrbracket$ .  
 $h$  : nombre réel strictement positif.

**Résultat :**  $\mathbf{W}$  : vecteur de  $\mathbb{R}^{N+1}$  tel que  
 $W_{n+1} = f'(t^n) + \mathcal{O}(h^2), \forall n \in \llbracket 0, N \rrbracket$ .

---

```

1: Fonction  $\mathbf{W} \leftarrow \text{Derive1Ordre2}(h, \mathbf{F})$ 
2:    $W(1) \leftarrow (-3 * F(1) + 4 * F(2) - F(3)) / (2 * h)$ 
3:   Pour  $i \leftarrow 2$  à  $N$  faire
4:      $W(i) \leftarrow (F(i+1) - F(i-1)) / (2 * h)$ 
5:   Fin Pour
6:    $W(N+1) \leftarrow (3 * F(N+1) - 4 * F(N) + F(N-1)) / (2 * h)$ 
7: Fin Fonction

```

---

D'autres façons de présenter le problème sont possibles mais les données peuvent différer de celles de l'énoncé. Par exemple une autre fonction algorithmique pourrait être

---

**Algorithme 4** Approximations d'ordre 2 de dérivées premières d'une fonction  $f$  définie sur un intervalle  $[a, b]$  calculées aux points de de la discrétisation régulière de  $[a, b]$  avec  $N$  pas de discrétisation. Les approximations sont calculées en tous les points de la discrétisation

---

**Données :**  $f$  :  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$   
 $a, b$  : deux réels,  $a < b$ ,  
 $N$  : nombre de pas de discrétisation

**Résultat :**  $\mathbf{W}$  : vecteur de  $\mathbb{R}^{N+1}$  tel que  $W_{n+1} = f'(t^n) + \mathcal{O}(h^2)$   
avec  $(t^n)_{n=0}^N$  discrétisation régulière de  $[a, b]$ .

---

```

1: Fonction  $\mathbf{W} \leftarrow \text{Derive1Ordre2-v1}(f, a, b, N)$ 
2:    $t \leftarrow \text{DisReg}(a, b, N)$  ▷ fonction retournant la discrétisation régulière...
3:    $h \leftarrow (b - a) / N$ 
4:    $W(1) \leftarrow (-3 * f(t(1)) + 4 * f(t(2)) - f(t(3))) / (2 * h)$ 
5:   Pour  $i \leftarrow 2$  à  $N$  faire
6:      $W(i) \leftarrow (f(t(i+1)) - f(t(i-1))) / (2 * h)$ 
7:   Fin Pour
8:    $W(N+1) \leftarrow (3 * f(t(N+1)) - 4 * f(t(N)) + f(t(N-1))) / (2 * h)$ 
9: Fin Fonction

```

---

## EXERCICE 4

On suppose écrites les fonctions Matlab/Octave [Derive1Order1](#) et [Derive1Order2](#) correspondant aux fonctions algorithmiques de l'exercice 3. Leurs syntaxes sont les suivantes:

$\mathbf{V} = \text{Derive1Ordre1}(h, \mathbf{F})$  et  $\mathbf{W} = \text{Derive1Ordre2}(h, \mathbf{F})$

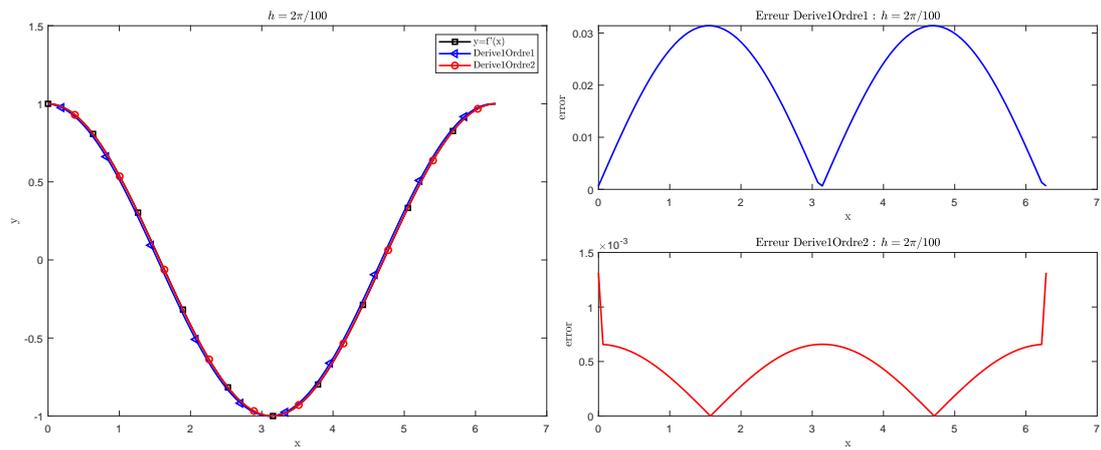
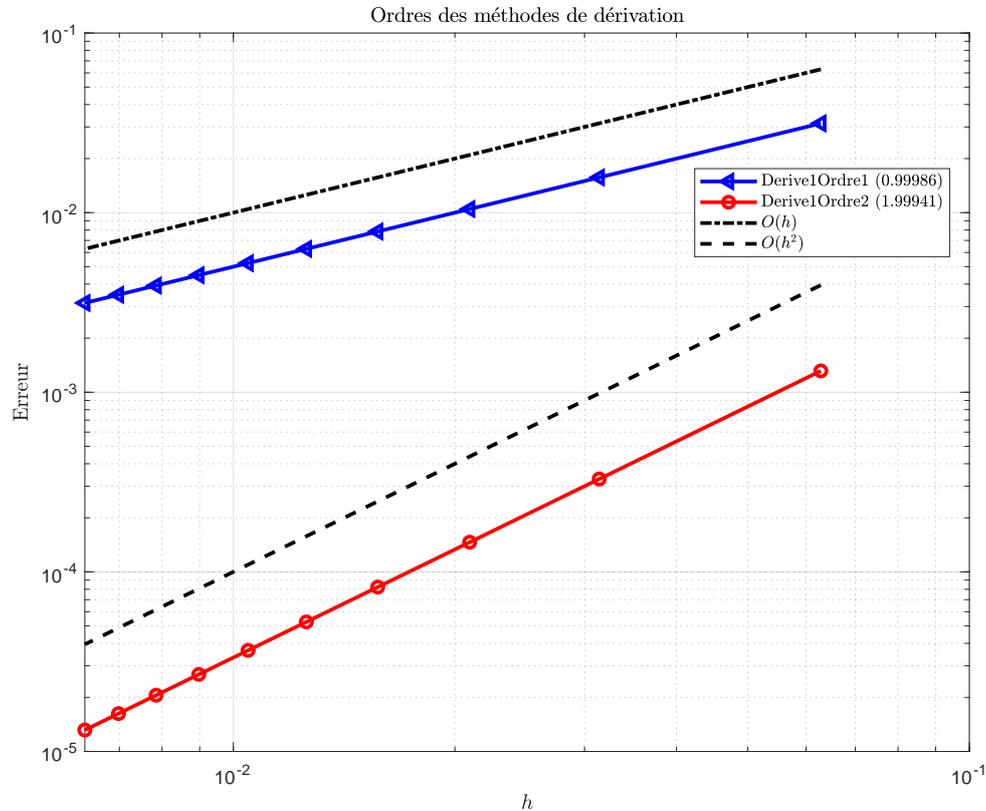


Figure 3: Avec  $f(x) = \sin(x)$ ,  $a = 0$ ,  $b = 2\pi$ ,  $N = 100$ , à gauche, les différentes dérivées, à droite les erreurs commises par les deux fonctions.

Q. 1 Ecrire un programme Matlab/Octave permettant de reproduire ces deux graphiques. □

## EXERCICE 5

Voici une figure mettant en évidence l'ordre des méthodes utilisées dans les fonctions `Derive1Order1` et `Derive1Order2` de l'exercice 3.



On suppose écrites les fonctions Matlab/Octave `Derive1Order1` et `Derive1Order2` correspondant aux fonctions algorithmiques de l'exercice 3. Leurs syntaxes sont les suivantes:

$$V = \text{Derive1Ordre1}(h, F) \quad \text{et} \quad W = \text{Derive1Ordre2}(h, F)$$

- Q. 1** a. *Ecrire un programme Matlab/Octave permettant de calculer l'ensemble des données nécessaires à la représentation graphique de l'ordre des deux méthodes (voir figure).*
- b. *A l'aide de ces données, calculer numériquement l'ordre des deux méthodes.* □

Les commandes Matlab/Octave permettant de représenter des données en échelles logarithmique sont `loglog`, `semilogx` et `semilogy`. Elles s'utilisent globalement comme la fonction `plot`.

- Q. 2** *Ajouter au programme précédent le code permettant de reproduire la figure.* □