

EXAMEN DU 4 AVRIL 2023

durée : 2h30.

Sans documents, sans calculatrice, sans portable, ...

Le barème est donné à titre indicatif

EXERCICE 1 : E.D.O. (10 points)

Q. 1 (a). Que signifie l'abréviation *E.D.O.*?

(b). Donner la définition détaillée d'un problème de Cauchy **vectoriel**.

(c). Quelles sont les données d'un problème de Cauchy **vectoriel**?

(d). Que cherche-t'on? □

Q. 2 Ecrire une fonction algorithmique *DisReg* permettant de d'obtenir une discrétisation régulière de l'intervalle $[a, b]$ ($a < b$) en $n + 1$ points. □

On souhaite résoudre numériquement un problème de Cauchy par un schéma explicite à un pas (constant) du type

$$\mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + h\Phi(t^n, \mathbf{y}^{[n]}, h) \quad (1)$$

La fonction Φ associée à une méthode de Runge-Kutta à q évaluations de $\mathbf{f}$ (fonction associée au problème de Cauchy) peut s'écrire sous la forme :

$$\Phi(t, \mathbf{y}, h) = \sum_{i=1}^q c_i \mathbf{k}^{[i]}(t, \mathbf{y}, h)$$

avec

$$\mathbf{k}^{[i]}(t, \mathbf{y}, h) = \mathbf{f} \left(t + ha_i, \mathbf{y} + h \sum_{j=1}^q b_{i,j} \mathbf{k}^{[j]}(t, \mathbf{y}, h) \right), \quad 1 \leq i \leq q$$

que l'on peut représenter sous la forme d'un tableau dit **tableau de Butcher** :

$$\begin{array}{c|c} \mathbf{a} & \mathbb{B} \\ \hline & \mathbf{c}^t \end{array} \quad (2)$$

avec $\mathbb{B} = (b_{i,j})_{i,j \in \llbracket 1, q \rrbracket} \in \mathcal{M}_{q,q}(\mathbb{R})$, $\mathbf{a} = (a_i)_{i \in \llbracket 1, q \rrbracket} \in \mathbb{R}^q$ et $\mathbf{c} = (c_i)_{i \in \llbracket 1, q \rrbracket} \in \mathbb{R}^q$.

On prend pour tableau de Butcher:

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{13}{7} & \frac{20}{7} & 0 \\ \hline & -\frac{1}{3} & \frac{25}{24} & \frac{7}{24} \end{array} \quad (3)$$

Q. 3 Ecrire explicitement et en détail le schéma de Runge-Kutta associé au tableau de Butcher (3). On admettra que ce schéma est d'ordre 3. □

Un autre schéma de Runge-Kutta d'ordre 3 pour la résolution d'un problème de Cauchy vectoriel est donné par

$$\begin{cases} \mathbf{y}^{[n+1]} &= \mathbf{y}^{[n]} + \frac{1}{36} h(3\mathbf{k}_1 + 25\mathbf{k}_2 + 8\mathbf{k}_3) \\ \text{avec} & \mathbf{k}_1 = \mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]}), \\ & \mathbf{k}_2 = \mathbf{f}(t^n + \frac{2}{5}h, \mathbf{y}^{[n]} + \frac{2}{5}h\mathbf{k}_1), \\ & \mathbf{k}_3 = \mathbf{f}(t^n + h, \mathbf{y}^{[n]} + h(-\frac{7}{8}\mathbf{k}_1 + \frac{15}{8}\mathbf{k}_2)), \\ \mathbf{y}^{[0]} & \text{donné.} \end{cases} \quad (4)$$

Q. 4 (Algorithmique) Ecrire la fonction algorithmique *REDRK3* permettant de résoudre un problème de Cauchy vectoriel par le schéma (4). □

Un schéma explicite, à **pas multiples**, et d'ordre 3 est donné par

$$\mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + h \left(\frac{23}{12} \mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]}) - \frac{4}{3} \mathbf{f}(t^{n-1}, \mathbf{y}^{[n-1]}) + \frac{5}{12} \mathbf{f}(t^{n-2}, \mathbf{y}^{[n-2]}) \right) \quad (5)$$

Q. 5 Expliquez en détail comment résoudre un problème de Cauchy vectoriel par le schéma (5). Un soin particulier sera apporté à l'«initialisation». □

Q. 6 (Algorithmique) Ecrire la fonction algorithmique **REDPM3** permettant de résoudre un problème de Cauchy (vectoriel) par le schéma (5). □

Application: Soit le système d'E.D.O. suivant

$$\begin{cases} \ddot{x}_1(t) - \nu_1(\dot{x}_2(t) - \dot{x}_1(t)) + x_2(t) = \cos(t) \\ \ddot{x}_2(t) - \nu_2(\dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t)) + x_1(t) = \sin(t) \end{cases} \quad \begin{matrix} (6a) \\ (6b) \end{matrix}$$

On veut résoudre ce système d'E.D.O. avec pour données initiales $x_1(0) = 1$, $\dot{x}_1(0) = 0$, $x_2(0) = -1$, $\dot{x}_2(0) = 1/2$. Le temps final T sera égal à 10.

Q. 7 Ecrire le problème précédent sous la forme d'un problème de Cauchy. □

Q. 8 (Algorithmique) Ecrire un algorithme complet permettant de résoudre (6a)-(6b) avec les données initiales spécifiées. On prendra $\nu_1 = 1/4$ et $\nu_2 = 1/3$. Ce programme devra aussi représenter les approximations des fonctions x_1 et x_2 . On utilisera pour cela la fonction **PLOT**(X, Y) qui relie les points $(X(i), Y(i))$ contenus dans les deux tableaux de même taille X et Y (fonction similaire à la fonction **plot** de Matlab). □

EXERCICE 2 : E.D.P. (10 points)

Soit l'E.D.P. suivante

$$-u''(x) + c(x)u'(x) = f(x), \quad \forall x \in]a; b[, \quad (1)$$

$$-u'(a) + \nu u(a) = \alpha, \quad (2)$$

$$u(b) = \beta. \quad (3)$$

où $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\nu \in \mathbb{R}^+$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ et c est une fonction strictement positive.

Q. 1 (a). Que signifie l'abréviation E.D.P. ?

(b). Quelles sont les données du problème (1)-(3) ? (préciser le type de chaque donnée : réel, entier, fonction, vecteur, ...)

(c). Quelles sont les inconnues du problème (1)-(3) ? (préciser le type)

(d). Quelles sont les conditions initiales ?

(e). Quelles sont les conditions aux limites ? □

On note x_i , $i \in \llbracket 0, N \rrbracket$ la discrétisation régulière de $[a; b]$ avec N pas de discrétisation. On souhaite résoudre l'E.D.P. (1) à (3) à l'aide des schémas numériques

$$-\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + c_i \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} = f_i, \quad (4)$$

$$(3 + 2\nu h)u_0 - 4u_1 + u_2 = 2h\alpha. \quad (5)$$

Q. 2 (a). Expliquer en détail comment le schéma (4) a été obtenu à partir de (1) et préciser ce que représentent les termes u_i , f_i , c_i et h ?

(b). Expliquer en détail comment le schéma (5) a été obtenu à partir de (2).

(c). Donner une discrétisation détaillée du problème (1) à (3) en utilisant les schémas (4) et (5).

(d). Le schéma global est de quel ordre ? Justifiez. □

On note $\mathbf{V}$ le vecteur de dimension $N + 1$, de composantes $V_i = u_{i-1}$, $\forall i \in \llbracket 1, N + 1 \rrbracket$.

Q. 3 Montrer, de manière détaillée, que le vecteur $\mathbf{V}$ est solution d'un système linéaire

$$\mathbb{A}\mathbf{V} = \mathbf{F} \quad (6)$$

en explicitant la matrice $\mathbb{A}$ et le vecteur $\mathbf{F}$ (préciser les dimensions). □

Q. 4 (Algorithmique) Ecrire la fonction **CREMAT** retournant la matrice $\mathbb{M} \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ définie par

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ p_1 & q_1 & r_1 & 0 & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & 0 & p_{d-2} & q_{d-2} & r_{d-2} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & e_1 & e_2 & e_3 \end{pmatrix} \quad (7)$$

où $(p_i)_{i=1}^{d-2}$, $(q_i)_{i=1}^{d-2}$, $(r_i)_{i=1}^{d-2}$, e_1 , e_2 , e_3 , f_1 , f_2 et f_3 sont des réels donnés. □

Q. 5 (Algorithmique) Ecrire la fonction algorithmique **RESEDP** permettant de résoudre le problème (1) à (3) en utilisant les schémas (4) et (5). Cette fonction devra retourner la discrétisation $(x_i)_{i=0}^N$ de l'intervalle $[a, b]$ avec N pas de discrétisation et l'ensemble des $(u_i)_{i=0}^N$. □

Q. 6 (Algorithmique) Ecrire un algorithme complet de résolution du problème (1) à (3) utilisant la fonction **RESEDP** dont les données seront choisies pour avoir comme solution exacte $u(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sin(x^2)$. On représentera l'erreur commise entre la solution exacte et la solution numérique calculée. Pour cela, on utilisera la fonction **PLOT**(X, Y) qui relie les points $(X(i), Y(i))$ contenus dans les deux tableaux de même taille X et Y (fonction similaire à la fonction **plot** de Matlab). □