EXAMEN DU 23 AVRIL 2024
durée : 2h30.

Sans documents, sans appareils électroniques, ...
Le barême est donné à titre indicatif

EXERCICE 1 : E.D.O. (10 points)

Q. 1 ***a.*** *Que signifie l'abréviation E.D.O.?*

b. *Donner la définition détaillée d'un problème de Cauchy* ***vectoriel****.*

c. *Quelles sont les données d'un problème de Cauchy* ***vectoriel****?*

d. *Que cherche-t'on?*

□

Q. 2 [Algo.] *Ecrire une fonction algorithmique* `DisReg` *permettant d'obtenir une discrétisation régulière de l'intervalle* $[a, b]$*, avec* $a < b$*, en* $(N+1)$ *points.* □

On souhaite résoudre numériquement un problème de Cauchy par un schéma explicite à un pas (constant) du type

$$\boldsymbol{y}^{[n+1]} = \boldsymbol{y}^{[n]} + h\boldsymbol{\Phi}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]}, h). \tag{1.1}$$

La fonction $\boldsymbol{\Phi}$ associée à une méthode de Runge-Kutta à q évaluations de $\boldsymbol{f}$ (fonction associée au problème de Cauchy) peut s'écrire sous la forme :

$$\boldsymbol{\Phi}(t, \boldsymbol{y}, h) = \sum_{i=1}^{q} c_i \boldsymbol{k}^{[i]}(t, \boldsymbol{y}, h)$$

avec

$$\boldsymbol{k}^{[i]}(t, \boldsymbol{y}, h) = \boldsymbol{f}\left(t + ha_i, y + h\sum_{j=1}^{q} b_{i,j}\boldsymbol{k}^{[j]}(t, \boldsymbol{y}, h)\right),\ 1 \leqslant i \leqslant q$$

que l'on peut représenter sous la forme d'un tableau dit **tableau de Butcher** :

$$\begin{array}{c|c} \boldsymbol{a} & \mathbb{B} \\ \hline & \boldsymbol{c}^t \end{array} \tag{1.2}$$

avec $\mathbb{B} = (b_{i,j})_{i,j\in[\![1,q]\!]} \in \mathcal{M}_{q,q}(\mathbb{R})$, $\boldsymbol{a} = (a_i)_{i\in[\![1,q]\!]} \in \mathbb{R}^q$ et $\boldsymbol{c} = (c_i)_{i\in[\![1,q]\!]} \in \mathbb{R}^q$.
On prend pour tableau de Butcher:

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{7}{5} & \frac{12}{5} & 0 \\ \hline & -\frac{1}{6} & \frac{8}{9} & \frac{5}{18} \end{array} \tag{1.3}$$

Q. 3 *Ecrire explicitement et en détail le schéma de Runge-Kutta associé au tableau de Butcher (1.3).* □

Un autre schéma de Runge-Kutta d'ordre 3 pour la résolution d'un problème de Cauchy vectoriel est donné par

$$\left\{\begin{array}{lcl} \boldsymbol{y}^{[n+1]} & = & \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{1}{36}h(8\,\boldsymbol{k}_1 + 25\,\boldsymbol{k}_2 + 3\,\boldsymbol{k}_3) \\ \text{avec} & & \boldsymbol{k}_1 = \boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]}), \\ & & \boldsymbol{k}_2 = \boldsymbol{f}(\frac{3}{5}h + t^n, \frac{3}{5}h\boldsymbol{k}_1 + \boldsymbol{y}^{[n]}), \\ & & \boldsymbol{k}_3 = \boldsymbol{f}(h + t^n, -\frac{1}{3}h(7\,\boldsymbol{k}_1 - 10\,\boldsymbol{k}_2) + \boldsymbol{y}^{[n]}), \\ \boldsymbol{y}^{[0]} & & \text{donné.} \end{array}\right. \tag{1.4}$$

Q. 4 [Algo.] *Ecrire la fonction algorithmique* RedRK3 *permettant de résoudre un problème de Cauchy vectoriel par le schéma* (1.4). □

Pour résoudre numériquement un problème de Cauchy, différentes méthodes peuvent être utilisées. Dans le reste de l'exercice, nous allons nous focaliser sur les méthodes dites de **Prédiction-Correction**. Soient les deux schémas suivants d'ordre 3:

$$\boldsymbol{y}^{[n+1]} = \boldsymbol{y}^{[n]} + h\left(\frac{23}{12}\boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]}) - \frac{4}{3}\boldsymbol{f}(t^{n-1}, \boldsymbol{y}^{[n-1]}) + \frac{5}{12}\boldsymbol{f}(t^{n-2}, \boldsymbol{y}^{[n-2]})\right) \tag{1.5}$$

$$\boldsymbol{y}^{[n+1]} = \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{h}{12}\left(5\boldsymbol{f}(t^{n+1}, \boldsymbol{y}^{[n+1]}) + 8\boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]}) - \boldsymbol{f}(t^{n-1}, \boldsymbol{y}^{[n-1]})\right). \tag{1.6}$$

Q. 5 *Expliquez en détail comment résoudre un problème de Cauchy vectoriel par un schéma de type* ***Prédiction-Correction*** *utilisant les deux schémas* (1.5) *et* (1.6). *Un soin particulier sera apporté à l'«initialisation».* □

Q. 6 [Algo.] *Ecrire la fonction algorithmique* RedPC3 *permettant de résoudre un problème de Cauchy (vectoriel) par les schémas* (1.5) *et* (1.6).

□

Application: Soit le système d'E.D.O. suivant

$$\forall t \in [0, 10], \quad \begin{cases} \dddot{x}_1(t) - 3(\ddot{x}_2(t) - \ddot{x}_1(t)) + 4\dot{x}_2(t) + x_1(t) & = \sin(t), \quad (1.7a) \\ \dddot{x}_2(t) - 4(\ddot{x}_1(t) - \ddot{x}_2(t)) + 2\dot{x}_1(t) - x_2(t) & = \cos(t) \quad (1.7b) \end{cases}$$

On veut résoudre ce système d'E.D.O. avec pour données initiales $x_1(0) = 1$, $\dot{x}_1(0) = 0$, $\ddot{x}_1(0) = 2$, $x_2(0) = -1$, $\dot{x}_2(0) = 1/2$, $\ddot{x}_2(0) = 3$.

Q. 7 *Ecrire le problème précédent sous la forme d'un problème de Cauchy.* □

Q. 8 [Algo.] *Ecrire un algorithme complet permettant de résoudre* (1.7a)-(1.7b) *avec les données initiales spécifiées. Ce programme devra aussi représenter les approximations des fonctions* x_1 *et* x_2. *On utilisera pour celà la fonction* Plot(X, Y) *qui relie les points* $(X(i), Y(i))$ *contenus dans les deux tableaux de même taille* X *et* Y *(fonction similaire à la fonction* `plot` *de Matlab).* □

Exercice 2 : E.D.P. (10 points)

Soit l'E.D.P. suivante

$$\begin{aligned} -u''(x) + c(x)u'(x) &= f(x), \ \forall x \in]a; b[, & (2.1) \\ -u'(a) + \nu u(a) &= \alpha, & (2.2) \\ u(b) &= \beta. & (2.3) \end{aligned}$$

où $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\nu \in \mathbb{R}^+$, $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et c est une fonction strictement positive.

Q. 1 **a.** *Que signifie l'abréviation E.D.P.?*

b. *Quelles sont les données du problème* (2.1) *à* (2.3)*? (préciser le type de chaque donnée : réel, entier, fonction, vecteur, ...)*

c. *Quelles sont les inconnues du problème* (2.1) *à* (2.3)*? (préciser le type)*

d. *Quelles sont les conditions initiales?*

e. *Quelles sont les conditions aux limites?*

□

On note x_i, $i \in [\![0, N]\!]$ la discrétisation régulière de $[a; b]$ avec N pas de discrétisation. On souhaite résoudre l'E.D.P. (2.1) à (2.3) à l'aide des schémas numériques

$$\begin{aligned} -\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + c_i \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} &= f_i, & (2.4) \\ (3 + 2\nu h)u_0 - 4u_1 + u_2 &= 2h\alpha. & (2.5) \end{aligned}$$

Q. 2 ***a.*** *Expliquer en détail comment le schéma (2.4) a été obtenu à partir de (2.1) et préciser ce que représentent les termes u_i, f_i, c_i et h?*

b. *Expliquer en détail comment le schéma (2.5) a été obtenu à partir de (2.2).*

c. *Donner une discrétisation détaillée du problème (2.1) à (2.3) en utilisant les schémas (2.4) et (2.5).*

d. *Le schéma global est de quel ordre? Justifiez.*

□

On note $\boldsymbol{V}$ le vecteur de dimension $(N + 1)$, de composantes $\boldsymbol{V}_i = u_{i-1}$, $\forall i \in [\![1, N + 1]\!]$.

Q. 3 *Montrer, de manière détaillée, que le vecteur $\boldsymbol{V}$ est solution d'un système linéaire*

$$\mathbb{A}\boldsymbol{V} = \boldsymbol{F} \tag{2.6}$$

en explicitant la matrice $\mathbb{A}$ et le vecteur $\boldsymbol{F}$ (préciser les dimensions). □

Q. 4 [Algo.] *Ecrire la fonction* CreMat *retournant la matrice $\mathbb{M} \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ définie par*

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ p_1 & q_1 & r_1 & 0 & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & 0 & p_{d-2} & q_{d-2} & r_{d-2} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & e_1 & e_2 & e_3 \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

où $(p_i)_{i=1}^{d-2}$, $(q_i)_{i=1}^{d-2}$, $(r_i)_{i=1}^{d-2}$, e_1, e_2, e_3, f_1, f_2 et f_3 sont des réels donnés. □

Q. 5 [Algo.] *Ecrire la fonction algorithmique* resEDP *permettant de résoudre le problème (2.1) à (2.3) en utilisant les schémas (2.4) et (2.5). Cette fonction devra retourner la discrétisation $(x_i)_{i=0}^N$ de l'intervalle $[a, b]$ avec N pas de discrétisation et l'ensemble des $(u_i)_{i=0}^N$.* □

Q. 6 [Algo.] *Ecrire un algorithme complet de résolution du problème (2.1) à (2.3) utilisant la fonction* resEDP *dont les données seront choisies pour avoir comme solution exacte $u(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sin(x^2)$. On représentera l'erreur commise entre la solution exacte et la solution numérique calculée. Pour celà, on utilisera la fonction* Plot(X, Y) *qui relie les points $(X(i), Y(i))$ contenus dans les deux tableaux de même taille X et Y (fonction similaire à la fonction* `plot` *de Matlab).* □