

Méthodes Numériques II

Chapitre 3: Equations Différentielles Ordinaires

Exercices - épisode 1

version du 2025/02/04 à 07:22:22

EXERCICE 1

Pour chacune des E.D.O. suivantes écrire le problème de Cauchy associé

- (a) $\begin{cases} x''(t) + \alpha x'(t) + \beta \cos(x(t)) = \sin(t), & t \in]0, 2\pi] \\ x(0) = 0, & x'(0) = 1. \end{cases}$
- (b) $\begin{cases} LCv''(t) + \left(\frac{L}{R_2} + R_1C\right)v'(t) + \left(\frac{R_1}{R_2} + 1\right)v(t) = e, & t \in]0, 100] \\ v(0) = 0, & v'(0) = 0. \end{cases}$
- (c) $\begin{cases} x''(t) = \mu(1 - x^2(t))x'(t) - x(t), & t \in]0, 10] \\ x(0) = 1, & x'(0) = -1. \end{cases}$
- (d) $\begin{cases} y^{(3)}(t) - \cos(t)y^{(2)}(t) + 2\sin(t)y^{(1)}(t) - y(t) = 0, & t \in]0, T] \\ y(0) = u_0, & y^{(1)}(0) = v_0, & y^{(2)}(0) = w_0. \end{cases}$
- (e) $\begin{cases} \forall t \in]0, T], & x_1''(t) - 2x_2'(t) + 3x_1'(t) + 4x_1(t)x_2(t) = \sin(t), \\ & x_2''(t) + 3x_1'(t) - 2x_2'(t) - 3x_1(t)x_2(t) = \cos(t), \\ & x_1(0) = 0, & x_1'(0) = -1, & x_2(0) = 1, & x_2'(0) = -2. \end{cases}$

EXERCICE 2

Déterminer le problème de Cauchy associé au modèle du Brusselator simplifié :

$$(\mathcal{B}) \quad \begin{cases} X'(t) &= 1 + \alpha X^2(t)Y(t) - (\beta + 1)X(t) \\ Y'(t) &= -\alpha X^2(t)Y(t) + \beta X(t) \end{cases}$$

avec C.I. $X(0) = X_0$ et $Y(0) = Y_0$.

EXERCICE 3

Déterminer le problème de Cauchy associé au modèle du pendule pesant simplifié :

$$(\mathcal{P}) \quad \theta^{(2)}(t) + \frac{g}{L} \sin(\theta(t)) = 0.$$

avec C.I. $\theta(0) = \theta_0$ et $\theta'(0) = \theta'_0$.

EXERCICE 4

On veut résoudre numériquement le problème $(\mathcal{P})$ suivant : trouver y telle que

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} y'(t) &= \cos(t) + 1, \quad \forall t \in [0, 4\pi] \\ y(0) &= 0. \end{cases}$$

dont la solution exacte est $y(t) = \sin(t) + t$.

On rappelle le schéma d'Euler progressif pour la résolution d'un problème de Cauchy

$$(\mathcal{S}) \quad \begin{cases} y^{[n+1]} &= y^{[n]} + hf(t^n, y^{[n]}), \\ y^{[0]} &\text{donné.} \end{cases}$$

avec $(t^n)_{n=0}^N$ discrétisation régulière de l'intervalle $[0, 4\pi]$ avec N pas de discrétisation.

Q. 1 Expliquer en détail comment utiliser le schéma d'Euler progressif pour résoudre le problème $(\mathcal{P})$ en précisant entre autres les données, les inconnues, les dimensions des variables, lien entre $y^{[n+1]}$ et la fonction y , ... □

Q. 2 Soit $a, b, a < b$ deux réels. Ecrire une fonction `DisReg` retournant une discrétisation régulière de l'intervalle $[a; b]$ avec N pas de discrétisation. □

Q. 3 Ecrire une fonction `redEUPsca` retournant l'ensemble des couples $(t^n, y^{[n+1]})_{n=0}^N$ calculés par le schéma d'Euler progressif. □

Q. 4 Ecrire un algorithme complet de résolution de $(\mathcal{P})$ par le schéma d'Euler progressif. □

EXERCICE 5

Soit le problème de Cauchy **vectoriel**

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(t) &= \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)), \quad \forall t \in [t^0, t^0 + T], \\ \mathbf{y}(t^0) &= \mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^m, \end{cases}$$

avec $\mathbf{f} : [t^0, t^0 + T] \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$. On souhaite écrire une fonction algorithmique `redEUPVec` permettant de résoudre ce problème de Cauchy (vectoriel) par le schéma **vectoriel** explicite d'Euler progressif

$$\begin{cases} \mathbf{y}^{[n+1]} &= \mathbf{y}^{[n]} + h\mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]}), \quad \forall n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket \\ \mathbf{y}^{[0]} &= \mathbf{y}_0 \end{cases}$$

avec $(t^n)_{n=0}^N$ la discrétisation régulière de $[t^0, t^0 + T]$ avec N pas de discrétisation et $\mathbf{y}^{[n]} = \begin{pmatrix} y_1^{[n]} \\ \vdots \\ y_m^{[n]} \end{pmatrix}$ et $\mathbf{y}^{[n]} \approx \mathbf{y}(t^n)$. Cette fonction devra retourner l'ensemble des t^n et des $\mathbf{y}^{[n]}$ pour $n \in \llbracket 0, N \rrbracket$.

- Q. 1** a. Rappeler précisément les données du problème de Cauchy **vectoriel**.
- b. Quelles sont les données de la fonction algorithmique `redEUPVec` en précisant le type et la dimension pour chacune?
- c. Quelles sont les sorties/résultats de la fonction algorithmique `redEUPVec` en précisant le type et la dimension pour chacun?

□

On rappelle l'écriture simplifiée d'accès aux colonnes d'une matrice décrit en section ??

Algorithmique		Description mathématique
fonction	version simplifiée	
$\mathbf{u} \leftarrow \text{getMatCol}(\mathbb{A}, j)$	$\mathbf{u} \leftarrow \mathbb{A}(:, j)$	$\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ est déterminé par $\mathbf{u}_i = \mathbb{A}_{i,j}, \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$
$\mathbb{A} \leftarrow \text{setMatCol}(\mathbb{A}, \mathbf{u}, j)$	$\mathbb{A}(:, j) \leftarrow \mathbf{u}$	la colonne j de $\mathbb{A}$ est remplacée par $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ et on a $\mathbb{A}_{i,j} = \mathbf{u}_i, \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Table 1: Accès algorithmique aux colonnes d'une matrice $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ décrit en section ??

Q. 2 Ecrire la fonction algorithmique `redEUPVec` permettant de résoudre ce problème de Cauchy (vectoriel) par le schéma explicite d'Euler progressif. On utilisera l'écriture algorithmique simplifiée d'accès aux éléments d'une matrice (voir Table 1). □

Q. 3 Ecrire la fonction algorithmique `redEUPVecfun` permettant de résoudre ce problème de Cauchy (vectoriel) par le schéma explicite d'Euler progressif. On utilisera l'écriture algorithmique avec fonctions pour l'accès aux éléments d'une matrice (voir Table 1). □

EXERCICE 6

Soit l'équation différentielle ordinaire linéaire du troisième ordre avec conditions initiales données par

$$(1 + t + t^2) y^{(3)}(t) + (3 + 6t) y^{(2)}(t) + 6 y^{(1)}(t) = 6t, \quad \forall t \in [0, T],$$

$$y(0) = \alpha, \quad y^{(1)}(0) = \beta, \quad y^{(2)}(0) = \gamma.$$

Ici $y^{(k)}$ note la dérivée k -ième de y .

Pour cette EDO, il existe une unique solution donnée par

$$y(t) = \frac{t^4 + 2At^2 + 4Bt + 4C}{4(t^2 + t + 1)}$$

avec $(A, B, C) \in \mathbb{R}^3$ vérifiant

$$C = \alpha, \quad B - C = \beta \quad \text{et} \quad A - 2B = \gamma.$$

On a aussi

$$y^{(1)}(t) = \frac{t^3 + At + B}{t^2 + t + 1} - \frac{(t^4 + 2At^2 + 4Bt + 4C)(2t + 1)}{4(t^2 + t + 1)^2}$$

$$y^{(2)}(t) = \frac{3t^2 + A}{t^2 + t + 1} - \frac{2(t^3 + At + B)(2t + 1)}{(t^2 + t + 1)^2} + \frac{(t^4 + 2At^2 + 4Bt + 4C)(2t + 1)^2}{2(t^2 + t + 1)^3} - \frac{t^4 + 2At^2 + 4Bt + 4C}{2(t^2 + t + 1)^2}.$$

Q. 1 Déterminer le problème de Cauchy vectoriel associé à cette EDO □

Dans la suite, on prendra $T = 10$, $\alpha = 6$, $\beta = -5$ et $\gamma = -2$.

Q. 2 Ecrire un programme permettant de résoudre numériquement le problème de Cauchy associé à cette EDO à l'aide de la fonction algorithmique $[\mathbf{t}, \mathbb{Y}] \leftarrow \text{redEUPvec}(f, t0, T, Y0, N)$ (voir Exercice précédent). □

On suppose que notre langage algorithmique dispose d'une fonction graphique $\text{plot}(X, Y)$ reliant par des segments les points successifs

$$(X(1), Y(1)), (X(2), Y(2)), \dots, (X(\text{end}), Y(\text{end}))$$

les tableaux X et Y ayant même longueurs et correspondent respectivement aux tableaux des abscisses et des ordonnées.

On pourra utiliser la version simplifiée du langage algorithmique.

Q. 3 Donner les commandes permettant, après avoir utilisé le programme algorithmique précédent, de représenter graphiquement les approximations obtenues par le schéma, de

$$(y(t^n))_{n=0}^N, \quad (y^{(1)}(t^n))_{n=0}^N \quad \text{et} \quad (y^{(2)}(t^n))_{n=0}^N$$

□

Q. 4 Ecrire un programme algorithmique permettant de représenter graphiquement les solutions exactes aux points de discrétisation, c'est à dire

$$(y(t^n))_{n=0}^N, \quad (y^{(1)}(t^n))_{n=0}^N \quad \text{et} \quad (y^{(2)}(t^n))_{n=0}^N$$

□

Q. 5 Ecrire un programme algorithmique permettant de représenter graphiquement les erreurs numériques commises en valeurs absolues par le schéma pour les approximations de

$$(y(t^n))_{n=0}^N, \quad (y^{(1)}(t^n))_{n=0}^N \quad \text{et} \quad (y^{(2)}(t^n))_{n=0}^N$$

□