

# Méthodes Numériques II

## Chapitre 3: Equations Différentielles Ordinaires

### Exercices - épisode 2

version du 2025/02/04 à 07:23:05

#### EXERCICE 1

la **méthode de Heun** est donnée par

$$\mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{2} \mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]}) + \frac{h}{2} \mathbf{f}\left(t^{n+1}, \mathbf{y}^{[n]} + h \mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]})\right).$$

**Q. 1** Ecrire la fonction algorithmique `REDHeunVec` permettant de résoudre un problème de Cauchy vectoriel par la méthode de Heun en utilisant au plus  $2N$  évaluation de  $\mathbf{f}$ . □

**Q. 2** Ecrire un programme algorithmique permettant de retrouver numériquement l'ordre de cette méthode. □

#### EXERCICE 2

la **méthode de Runge-Kutta d'ordre 4** est donnée par

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1^{[n]} &= \mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]}) \\ \mathbf{k}_2^{[n]} &= \mathbf{f}\left(t^n + \frac{h}{2}, \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{2} \mathbf{k}_1^{[n]}\right) \\ \mathbf{k}_3^{[n]} &= \mathbf{f}\left(t^n + \frac{h}{2}, \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{2} \mathbf{k}_2^{[n]}\right) \\ \mathbf{k}_4^{[n]} &= \mathbf{f}\left(t^n + h, \mathbf{y}^{[n]} + h \mathbf{k}_3^{[n]}\right) \\ \mathbf{y}^{[n+1]} &= \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{6} (\mathbf{k}_1^{[n]} + 2\mathbf{k}_2^{[n]} + 2\mathbf{k}_3^{[n]} + \mathbf{k}_4^{[n]}). \end{aligned}$$

**Q. 1** Ecrire une fonction algorithmique `REDRK4Vec` permettant de résoudre un problème de Cauchy vectoriel par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4. □

**Q. 2** Ecrire un programme algorithmique permettant de retrouver numériquement l'ordre de cette méthode. □

#### EXERCICE 3

La **méthode de Adam-Bashforth d'ordre 4 explicite** est donnée par

$$\mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{24} \left( 55\mathbf{f}^{[n]} - 59\mathbf{f}^{[n-1]} + 37\mathbf{f}^{[n-2]} - 9\mathbf{f}^{[n-3]} \right). \quad (3.1)$$

avec  $\mathbf{f}^{[n]} = \mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]})$ .

**Q. 1** Ecrire la fonction algorithmique `REDAB4Vec` permettant de résoudre un problème de Cauchy vectoriel par cette méthode. □

#### EXERCICE 4

On pose  $\mathbf{f}^{[n]} = \mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]})$ . La méthode de Adams-Bashforth d'ordre 4 explicite est donnée par

$$\mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{24} \left( 55\mathbf{f}^{[n]} - 59\mathbf{f}^{[n-1]} + 37\mathbf{f}^{[n-2]} - 9\mathbf{f}^{[n-3]} \right)$$

et la méthode de Adams-Moulton d'ordre 4 implicite par

$$\mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + \frac{h}{24} \left( 9\mathbf{f}^{[n+1]} + 19\mathbf{f}^{[n]} - 5\mathbf{f}^{[n-1]} + \mathbf{f}^{[n-2]} \right)$$

avec  $\mathbf{f}^{[n]} = \mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]})$ .

**Q. 1** Ecrire la fonction algorithmique REDPC4Vec permettant de résoudre un problème de Cauchy (vectoriel) par une méthode de prédiction-correction utilisant ces deux schémas. On minimisera le nombre d'appel à la fonction  $\mathbf{f}$  dans la boucle principale.  $\square$

### EXERCICE 5 : Examen du 4 avril 2023, partie E.D.O.

**Q. 1** a. Que signifie l'abréviation E.D.O. ?

b. Donner la définition détaillée d'un problème de Cauchy vectoriel.

c. Quelles sont les données d'un problème de Cauchy vectoriel ?

d. Que cherche-t'on ?  $\square$

**Q. 2** Ecrire une fonction algorithmique DisReg permettant de d'obtenir une discrétisation régulière de l'intervalle  $[a, b]$  ( $a < b$ ) en  $n + 1$  points.  $\square$

On souhaite résoudre numériquement un problème de Cauchy par un schéma explicite à un pas (constant) du type

$$\mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + h\Phi(t^n, \mathbf{y}^{[n]}, h). \quad (5.2)$$

La fonction  $\Phi$  associée à une méthode de Runge-Kutta à  $q$  évaluations de  $\mathbf{f}$  (fonction associée au problème de Cauchy) peut s'écrire sous la forme :

$$\Phi(t, \mathbf{y}, h) = \sum_{i=1}^q c_i \mathbf{k}^{[i]}(t, \mathbf{y}, h)$$

avec

$$\mathbf{k}^{[i]}(t, \mathbf{y}, h) = \mathbf{f} \left( t + ha_i, \mathbf{y} + h \sum_{j=1}^q b_{i,j} \mathbf{k}^{[j]}(t, \mathbf{y}, h) \right), \quad 1 \leq i \leq q$$

que l'on peut représenter sous la forme d'un tableau dit **tableau de Butcher** :

$$\begin{array}{c|c} \mathbf{a} & \mathbb{B} \\ \hline & \mathbf{c}^t \end{array} \quad (5.3)$$

avec  $\mathbb{B} = (b_{i,j})_{i,j \in \llbracket 1, q \rrbracket} \in \mathcal{M}_{q,q}(\mathbb{R})$ ,  $\mathbf{a} = (a_i)_{i \in \llbracket 1, q \rrbracket} \in \mathbb{R}^q$  et  $\mathbf{c} = (c_i)_{i \in \llbracket 1, q \rrbracket} \in \mathbb{R}^q$ .

On prend pour tableau de Butcher:

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{13}{7} & \frac{20}{7} & 0 \\ \hline & -\frac{1}{3} & \frac{25}{24} & \frac{7}{24} \end{array} \quad (5.4)$$

**Q. 3** Ecrire explicitement et en détail le schéma de Runge-Kutta associé au tableau de Butcher (5.4). On admettra que ce schéma est d'ordre 3.  $\square$

Un autre schéma de Runge-Kutta d'ordre 3 pour la résolution d'un problème de Cauchy vectoriel est donné par

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + \frac{1}{36} h(3\mathbf{k}_1 + 25\mathbf{k}_2 + 8\mathbf{k}_3) \\ \text{avec} \quad \mathbf{k}_1 = \mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]}), \\ \quad \quad \mathbf{k}_2 = \mathbf{f}(t^n + \frac{2}{5}h, \mathbf{y}^{[n]} + \frac{2}{5}h\mathbf{k}_1), \\ \quad \quad \mathbf{k}_3 = \mathbf{f}(t^n + h, \mathbf{y}^{[n]} + h(-\frac{7}{8}\mathbf{k}_1 + \frac{15}{8}\mathbf{k}_2)), \\ \mathbf{y}^{[0]} \quad \text{donné.} \end{array} \right. \quad (5.5)$$

**Q. 4** [Algorithmique] Ecrire la fonction algorithmique `RedRK3` permettant de résoudre un problème de Cauchy vectoriel par le schéma (5.5). □

Un schéma explicite, à **pas multiples**, et d'ordre 3 est donné par

$$\mathbf{y}^{[n+1]} = \mathbf{y}^{[n]} + h \left( \frac{23}{12} \mathbf{f}(t^n, \mathbf{y}^{[n]}) - \frac{4}{3} \mathbf{f}(t^{n-1}, \mathbf{y}^{[n-1]}) + \frac{5}{12} \mathbf{f}(t^{n-2}, \mathbf{y}^{[n-2]}) \right) \quad (5.6)$$

**Q. 5** Expliquez en détail comment résoudre un problème de Cauchy vectoriel par le schéma (5.6). Un soin particulier sera apporté à l'«initialisation». □

**Q. 6** [Algorithmique] Ecrire la fonction algorithmique `RedPM3` permettant de résoudre un problème de Cauchy (vectoriel) par le schéma (5.6). □

**Application:** Soit le système d'E.D.O. suivant

$$\begin{cases} \ddot{x}_1(t) - \nu_1(\dot{x}_2(t) - \dot{x}_1(t)) + x_2(t) = \cos(t) & (5.7a) \\ \ddot{x}_2(t) - \nu_2(\dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t)) + x_1(t) = \sin(t) & (5.7b) \end{cases}$$

On veut résoudre numériquement ce système d'E.D.O. avec pour données initiales  $x_1(0) = 1$ ,  $\dot{x}_1(0) = 0$ ,  $x_2(0) = -1$ ,  $\dot{x}_2(0) = 1/2$ . Le temps final  $T$  sera égal à 10.

**Q. 7** Ecrire le problème précédent sous la forme d'un problème de Cauchy. □

**Q. 8** [Algorithmique] Ecrire un algorithme complet permettant de résoudre (5.7a)-(5.7b) avec les données initiales spécifiées. On prendra  $\nu_1 = 1/4$  et  $\nu_2 = 1/3$ . Ce programme devra aussi représenter les approximations des fonctions  $x_1$  et  $x_2$ . On utilisera pour cela la fonction `Plot(X, Y)` qui relie les points  $(X(i), Y(i))$  contenus dans les deux tableaux de même taille  $X$  et  $Y$  (fonction similaire à la fonction `plot` de Matlab). □