

Méthodes Numériques II

Chapitre 4: Equations aux Dérivées Partielles

Exercices - épisode 1 version du 2025/02/13 à 05:51:40

EXERCICE 1 : schéma étudié en cours

Q. 1 Ecrire la fonction `AssembleMat1D` retournant la matrice $\mathbb{M} \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ définie par

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \beta & \alpha_1 & \beta & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \beta & \alpha_{d-2} & \beta \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

où $\alpha_1, \dots, \alpha_{d-2}, \beta$ et γ sont des réels donnés. □

On souhaite résoudre par un schéma aux différences finies l'EDP suivante:

$$\begin{aligned} -u'' + cu &= f \text{ in }]a, b[, \\ u(a) &= \alpha \in \mathbb{R}, \\ u(b) &= \beta \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

où $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

On note $(x_i)_{i=0}^N$ la discrétisation régulière de $[a, b]$ avec N pas de discrétisation. Le schéma d'ordre 2 suivant

$$u_0 = \alpha, \quad (1.2)$$

$$-\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + c(x_i)u_i = f(x_i) \quad \forall i \in]0, N[, \quad (1.3)$$

$$u_N = \beta. \quad (1.4)$$

vérifie

$$\max_{i \in [0, N]} |u(x_i) - u_i| = \mathcal{O}(h^2). \quad (1.5)$$

On note \mathbf{V} le vecteur de dimension $N + 1$, de composantes $\mathbf{V}_i = u_{i-1}, \forall i \in [1, N + 1]$.

Q. 2 Montrer que (1.2)-(1.4) est équivalent à résoudre un système linéaire

$$\mathbb{A}\mathbf{V} = \mathbf{F} \quad (1.6)$$

ou l'on explicitera la matrice \mathbb{A} et le vecteur \mathbf{F} en précisant les dimensions. □

Q. 3 a. Ecrire une fonction algorithmique `solvePDE` permettant de résoudre l'EDP précédente par le schéma (1.2)-(1.4). On pourra utiliser la fonction $\mathbf{X} \leftarrow \text{Solve}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ retournant la solution du système linéaire $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{B}$.

b. En choisissant jeu de données pertinent et non trivial avec solution exacte, écrire un programme algorithmique permettant d'obtenir la solution numérique donnée par le schéma (1.2)-(1.4) et de calculer $E = \max_{i \in [0, N]} |u(x_i) - u_i|$.

□

Q. 4 En choisissant judicieusement un jeu de données écrire un programme permettant de vérifier l'ordre du schéma utilisé à l'aide de la formule (??). □



Correction

Algorithme 1 Fonction `AssembleMat1D`

Données : d : dimension de la matrice,
 α : un vecteur de \mathbb{R}^{d-2} ,
 β, γ : deux réels

Résultat : \mathbb{M} : matrice $d \times d$

R. 1 1: **Fonction** $\mathbb{M} \leftarrow \text{AssembleMat1D}(d, \alpha, \beta, \gamma)$

2: $\mathbb{M} \leftarrow \mathbb{0}_{d,d}$

3: $\mathbb{M}(1,1) \leftarrow \gamma, \mathbb{M}(d,d) \leftarrow \gamma,$

4: **Pour** $i = 2$ à $d - 1$ **faire**

▷ Initialisation de la ligne i

5: $\mathbb{M}(i,i) \leftarrow \alpha(i-1), \mathbb{M}(i,i-1) \leftarrow \beta, \mathbb{M}(i,i+1) \leftarrow \beta$

6: **Fin Pour**

7: **Fin Fonction**

R. 2 Les (1.2)-(1.4) forment un système de $(N + 1)$ équations linéaires à $(N + 1)$ inconnues, les $(u_i)_{i=0}^N$: on peut donc l'écrire sous forme matricielle chacune des équations correspondant à une ligne du système. Pour alléger les écritures on note que (??) peut se réécrire

$$-u_{i+1} + \mu_i u_i - u_{i-1} = h^2 f(x_i)$$

avec $\mu_i = 2 + c(x_i)h^2$. Les équations discrétisées peuvent s'écrire

$$\left\{ \begin{array}{lll} u_0 & = & \alpha & \leftarrow \text{eq. en } x_0 \\ -u_2 + \mu_1 u_1 - u_0 & = & h^2 f(x_1) & \leftarrow \text{eq. en } x_1 \\ -u_3 + \mu_2 u_2 - u_1 & = & h^2 f(x_2) & \leftarrow \text{eq. en } x_2 \\ & & \vdots & \\ -u_{N-1} + \mu_{N-2} u_{N-2} - u_{N-3} & = & h^2 f(x_{N-2}) & \leftarrow \text{eq. en } x_{N-2} \\ -u_N + \mu_{N-1} u_{N-1} - u_{N-2} & = & h^2 f(x_{N-1}) & \leftarrow \text{eq. en } x_{N-1} \\ u_N & = & \beta & \leftarrow \text{eq. en } x_N \end{array} \right.$$

En multipliant les équations en x_0 et en x_N par h^2 , le système linéaire équivalent à (??)-(??) peut alors s'écrire sous la forme matricielle suivante

$$\mathbb{A}\mathbf{U} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} h^2 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ -1 & \mu_1 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \mu_2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \dots & 0 & -1 & \mu_{N-2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & \mu_{N-1} & -1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & h^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{N-2} \\ u_{N-1} \\ u_N \end{pmatrix} = h^2 \begin{pmatrix} \alpha \\ f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ \vdots \\ f(x_{N-2}) \\ f(x_{N-1}) \\ \beta \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{B} \quad (1.7)$$

R. 3 a. Il nous faut résoudre le système (4.48) avec le jeu de données. On peut par exemple écrire la fonction `solvePDE` qui à partir du jeu de données et du nombre de discrétisation N va nous retourner le vecteur solution de (4.48).

Algorithme 2 Fonction `solvePDE` : résolution de l'EDP (??)-(??) par le schéma aux différences finies (??)-(??)

Données : a, b : $a < b$,
 c : fonction de $[a, b]$ à valeurs réelles positives ,
 α, β : deux réels,
 f : fonction de $[a, b]$ à valeurs réelles,
 N : nombre de discrétisation

Résultat : \mathbf{x} : vecteur de \mathbb{R}^{N+1} , discrétisation régulière de l'intervalle $[a, b]$,
avec $N + 1$ points. $\mathbf{x}(i + 1) = x_i$.
 \mathbf{U} : vecteur de \mathbb{R}^{N+1} tel que $\mathbf{U}(i + 1) \approx u(x_i)$

```

1: Fonction  $[\mathbf{x}, \mathbf{U}] \leftarrow \text{solvePDE}( a, b, \alpha, \beta, c, f, N )$ 
2:  $\mathbf{x} \leftarrow \text{DisReg}(a, b, N)$ 
3:  $h \leftarrow (b - a)/N$ 
4:  $\mathbf{B}(1) \leftarrow h^2\alpha, \mathbf{B}(N + 1) \leftarrow h^2\beta$ 
5: Pour  $i = 2$  à  $N$  faire ▷ Initialisation de la ligne  $i$  de  $\mathbf{B}$ 
6:    $\mathbf{B}(i) \leftarrow h^2f(\mathbf{x}(i))$ 
7:    $\boldsymbol{\mu}(i - 1) \leftarrow 2 + h^2c(\mathbf{x}(i))$ 
8: Fin Pour
9:  $\mathbb{A} \leftarrow \text{AssembleMat1D}(N + 1, \boldsymbol{\mu}, -1, h^2)$ 
10:  $\mathbf{U} \leftarrow \text{Solve}(\mathbb{A}, \mathbf{B})$ 
11: Fin Fonction

```

b. Il nous faut donc choisir les données pour avoir une solution analytique. En fait, pour cela, on choisit une fonction u suffisamment régulière, par exemple $u(x) = \cos(x^2)$. Ensuite on fixe la fonction $c(x) = x^2$ par exemple. On peut alors déterminer la fonction f qui est donnée par $f(x) = -u''(x) + c(x)u(x)$. On obtient ainsi $f(x) = 5x^2 \cos(x^2) + 2 \sin(x^2)$. Les conditions aux limites sont alors $u(a) = \cos(a^2)$ et $u(b) = \cos(b^2)$.

- 1: $a \leftarrow 0, b \leftarrow 2 * \pi$
- 2: $u_{\text{ex}} \leftarrow (x \mapsto \cos(x^2))$
- 3: $c \leftarrow (x \mapsto x^2)$
- 4: $f \leftarrow (x \mapsto 5x^2 \cos(x^2) + 2 \sin(x^2))$
- 5: $[\mathbf{x}, \mathbf{U}] \leftarrow \text{solvePDE}(a, b, -1, 1, c, f, 500)$
- 6: $E \leftarrow \text{max}(\text{abs}(\mathbf{U} - u_{\text{ex}}(\mathbf{x})))$

R. 4 On reprend l'EDP avec solution exacte de la question précédente. Pour un N donné, on note $(x_i)_{i=0}^N$ la discrétisation régulière, $h = (b - a)/N$ et

$$E(h) = \max_{n \in \llbracket 0, N \rrbracket} |u_i - u_{\text{ex}}(x_i)|.$$

On a alors, d'après l'énoncé, $E(h) = \mathcal{O}(h^2) \approx Ch^2$ quand h est suffisamment petit. On utilise alors une échelle logarithmique pour représenter la courbe. En effet, on a

$$\log E(h) \approx \log(Ch^2) = \log(C) + 2 \log(h)$$

En posant $X = \log(h)$ et $Y = \log E(h)$, coordonnées en échelle logarithmique, on a

$$Y \approx \log(C) + 2X$$

qui est l'équation d'une droite. La pente de cette droite est donc l'ordre du schéma.

- 1: $a \leftarrow 0, b \leftarrow 2 * \pi$
- 2: $u_{\text{ex}} \leftarrow (x \mapsto \cos(x^2))$
- 3: $c \leftarrow (x \mapsto x^2)$
- 4: $f \leftarrow (x \mapsto 5x^2 \cos(x^2) + 2 \sin(x^2))$
- 5: $LN \leftarrow 100 : 50 : 1000$
- 6: $nLN \leftarrow \text{length}(LN)$
- 7: $H \leftarrow \mathbb{O}_{nLN},$ ▷ pour stocker les h
- 8: $E \leftarrow \mathbb{O}_{nLN},$ ▷ pour stocker les erreurs
- 9: **Pour** $k \leftarrow 1$ **à** nLN **faire**
- 10: $N \leftarrow LN(k)$
- 11: $[\mathbf{x}, \mathbf{U}] \leftarrow \text{SolvePDE}(a, b, -1, 1, c, f, 500)$
- 12: $E(k) \leftarrow \text{max}(\text{abs}(\mathbf{U} - u_{\text{ex}}(\mathbf{x})))$
- 13: $H(k) \leftarrow (b - a)/N$
- 14: **Fin Pour**
- 15: ... ▷ Representation graphique

◇

EXERCICE 2 : énoncé du cours

Soit φ une fonction suffisamment régulière et $h > 0$

Q. 1 Montrer que

$$\frac{d\varphi}{dx}(x) = \frac{-3\varphi(x) + 4\varphi(x+h) - \varphi(x+2h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \quad (2.8)$$

□

Q. 2 Montrer que

$$\frac{d\varphi}{dx}(x) = \frac{3\varphi(x) - 4\varphi(x-h) + \varphi(x-2h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \quad (2.9)$$

□

Q. 3 Déterminer une formule permettant de calculer une approximation à l'ordre 2 de $\frac{d^2\varphi}{dx^2}(x)$ en utilisant uniquement des valeurs de la fonction φ aux points $x + ih$ avec $i \in \mathbb{N}$.

□

Q. 4 Déterminer une formule permettant de calculer une approximation à l'ordre 2 de $\frac{d^2\varphi}{dx^2}(x)$ en utilisant uniquement des valeurs de la fonction φ aux points $x - ih$ avec $i \in \mathbb{N}$.

□



Correction

R. 1 Soit φ une fonction suffisamment régulière et $h > 0$

Pour cela, on écrit les deux développements de Taylor en $x+h$ et $x+2h$.

Il existe $\xi_1^+ \in]x, x+h[$ tel que

$$\varphi(x+h) = \varphi(x) + h \frac{d\varphi}{dx}(x) + \frac{h^2}{2!} \frac{d^2\varphi}{dx^2}(x) + \frac{h^3}{3!} \frac{d^3\varphi}{dx^3}(\xi_1^+) \quad (2.10)$$

et Il existe $\xi_2^+ \in]x, x+2h[$ tel que

$$\varphi(x+2h) = \varphi(x) + (2h) \frac{d\varphi}{dx}(x) + \frac{(2h)^2}{2!} \frac{d^2\varphi}{dx^2}(x) + \frac{(2h)^3}{3!} \frac{d^3\varphi}{dx^3}(\xi_2^+) \quad (2.11)$$

L'objectif est d'obtenir, par une combinaison linéaire entre ces deux formules, une nouvelle équation ne comportant plus de termes en $\frac{d^2\varphi}{dx^2}$. En effectuant $4 \times (4.43) - (4.44)$ on obtient

$$4\varphi(x+h) - \varphi(x+2h) = 3\varphi(x) + 2h \frac{d\varphi}{dx}(x) + 4 \frac{h^3}{3!} \frac{d^3\varphi}{dx^3}(\xi_1^+) - \frac{(2h)^3}{3!} \frac{d^3\varphi}{dx^3}(\xi_2^+)$$

On en déduit

$$\frac{d\varphi}{dx}(x) = \frac{-3\varphi(x) + 4\varphi(x+h) - \varphi(x+2h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2)$$

R. 2 Soit φ une fonction suffisamment régulière et $h > 0$.
 Pour cela, on écrit les deux développements de Taylor en $x - h$ et $x - 2h$.
 Il existe $\xi_1^- \in]x - h, x[$ tel que

$$\varphi(x - h) = \varphi(x) - h \frac{d\varphi}{dx}(x) + \frac{(-h)^2}{2!} \frac{d^2\varphi}{dx^2}(x) + \frac{(-h)^3}{3!} \frac{d^3\varphi}{dx^3}(\xi_1^-) \quad (2.12)$$

et Il existe $\xi_2^- \in]x - 2h, x[$ tel que

$$\varphi(x - 2h) = \varphi(x) + (-2h) \frac{d\varphi}{dx}(x) + \frac{(-2h)^2}{2!} \frac{d^2\varphi}{dx^2}(x) + \frac{(-2h)^3}{3!} \frac{d^3\varphi}{dx^3}(\xi_2^+) \quad (2.13)$$

L'objectif est d'obtenir, par une combinaison linéaire entre ces deux formules, une nouvelle équation ne comportant plus de termes en $\frac{d^2\varphi}{dx^2}$. En effectuant $4 \times (2.12) - (2.13)$ on obtient

$$4\varphi(x - h) - \varphi(x - 2h) = 3\varphi(x) - 2h \frac{d\varphi}{dx}(x) + 4 \frac{(-h)^3}{3!} \frac{d^3\varphi}{dx^3}(\xi_1^-) - \frac{(-2h)^3}{3!} \frac{d^3\varphi}{dx^3}(\xi_2^-)$$

On en déduit

$$\frac{d\varphi}{dx}(x) = \frac{3\varphi(x) - 4\varphi(x - h) + \varphi(x - 2h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2)$$

◇

EXERCICE 3 : énoncé du cours

Soit le problème suivant

$$-u''(x) + c(x)u(x) = f(x), \quad \forall x \in]a; b[, \quad (3.14)$$

$$u'(a) = \alpha, \quad (3.15)$$

$$u(b) = \beta. \quad (3.16)$$

où c est une fonction positive.

Q. 1 a. Quelles sont les données du problème (3.14)-(3.16)? (préciser le type de chaque donnée : réel, entier, fonction, vecteur, ...)

b. Quelles sont les inconnues du problème (3.14)-(3.16)? (préciser le type)

c. Quelles sont les conditions initiales?

d. Quelles sont les conditions aux limites?

□

Q. 2 Construire une discrétisation régulière de $[a; b]$ avec N pas de discrétisation en espace.

□

On note $x_i, i \in \llbracket 0, N \rrbracket$ cette discrétisation. On souhaite résoudre (3.14) à l'aide du schéma numérique

$$-\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2} + c_i u_i = f_i. \quad (3.17)$$

- Q. 3** a. Expliquer comment le schéma (3.17) a été obtenu à partir de (3.14) et préciser ce que représente les termes u_i , f_i , c_i et Δx ?
- b. Donner l'ensemble \mathcal{E} des valeurs que peut prendre i dans le schéma (3.14).
- c. Construire une discrétisation des conditions aux limites d'ordre 2 au moins.
- d. Le schéma global est de quel ordre? Justifiez.

□

On note \mathbf{V} le vecteur de dimension $N + 1$, de composantes $V_i = u_{i-1}$, $\forall i \in \llbracket 1, N + 1 \rrbracket$.

- Q. 4** Montrer que le vecteur \mathbf{V} est solution du système linéaire

$$\mathbb{A}\mathbf{V} = \mathbf{F} \quad (3.18)$$

en explicitant la matrice \mathbb{A} et le vecteur \mathbf{F} (préciser les dimensions).

□

- Q. 5** Ecrire un algorithme complet de résolution du problème (3.14) à (3.16) basé sur (3.18). (Utiliser au maximum les fonctions). On pourra utiliser la fonction $\mathbf{X} \leftarrow \text{Solve}(\mathbb{A}, \mathbf{B})$ retournant la solution du système linéaire $\mathbb{A}\mathbf{X} = \mathbf{B}$.

□



Correction

- R. 1** a. Les données du problème (3.14)-(3.16) sont :

Données : a, b : deux réels, $a < b$
 α, β : deux réels,
 c : une fonction $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $c(x) \geq 0$,
 f : une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

- b. L'inconnue du problème (3.14)-(3.16) est la fonction u , $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.
- c. Il n'y a pas de condition initiale, le problème étant stationnaire!
- d. Les conditions aux limites sont (3.15) (appelée condition de Neumann) et (3.16) (appelée condition de Dirichlet).

- R. 2** Soit $\Delta_x = (b - a)/N$. La discrétisation régulière de l'intervalle $[a; b]$ avec N pas de discrétisation est l'ensemble des points x_i , $i \in \llbracket 0, N \rrbracket$ tel que

$$x_i = a + i\Delta_x, \quad \forall i \in \llbracket 0, N \rrbracket$$

R. 3 a. De (3.14), on déduit

$$-u''(x_i) + c(x_i)u(x_i) = f(x_i), \quad \forall i \in \llbracket 0, N \rrbracket \quad (3.19)$$

En utilisant deux développements de Taylor à l'ordre 4 en $x+h \in [a, b]$ et $x-h \in [a, b]$ on obtient

$$u(x+h) = u(x) + hu'(x) + \frac{h^2}{2!}u''(x) + \frac{h^3}{3!}u^{(3)}(x) + \mathcal{O}(h^4) \quad (3.20)$$

$$u(x-h) = u(x) - hu'(x) + \frac{(-h)^2}{2!}u''(x) + \frac{(-h)^3}{3!}u^{(3)}(x) + \mathcal{O}(h^4). \quad (3.21)$$

En sommant ces deux équations, on abouti a

$$u(x+h) + u(x-h) = 2u(x) + h^2u''(x) + \mathcal{O}(h^4)$$

et donc

$$u''(x) = \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2).$$

Cette dernière équation peut s'appliquer en $x = x_i$ avec $h = \Delta x$ pour tout $i \in \llbracket 0, N \rrbracket$ et on a alors

$$u''(x_i) = \frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1}))}{\Delta x^2} + \mathcal{O}(\Delta x^2). \quad (3.22)$$

En remplaçant, dans (3.23), $u''(x_i)$ par l'expression précédente on obtient

$$\frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1}))}{\Delta x^2} + \mathcal{O}(\Delta x^2) + c(x_i)u(x_i) = f(x_i), \quad \forall i \in \llbracket 0, N \rrbracket \quad (3.23)$$

Il faut noter qu'il n'est pas possible d'utiliser cette relation en $i = 0$ ou en $i = N$. Le schéma (3.17) est donc une approximation de (3.23) où l'on a *oublié* le terme en $\mathcal{O}(\Delta x^2)$ et noté $u_i \approx u(x_i)$, $c_i = c(x_i)$ et $f_i = f(x_i)$.

b. On a $\mathcal{E} = \llbracket 0, N \rrbracket$.

c. On note $h = \Delta_x$. La condition de Dirichlet (3.16) s'écrit de manière exacte

$$u_N = u(x_N) = \beta. \quad (3.24)$$

Pour la condition de Neumann (3.15) il va falloir travailler un peu et déterminer une approximation de la dérivée première de u en $a = x_0$ d'ordre 2. Pour celà, on écrit les deux développements de Taylor en $a+h = x_1$ et $a+2h = x_2$.

$$u(a+h) = u(a) + hu'(a) + \frac{h^2}{2!}u''(a) + \mathcal{O}(h^3), \quad (3.25)$$

$$u(a+2h) = u(a) + (2h)u'(a) + \frac{(2h)^2}{2!}u''(a) + \mathcal{O}(h^3). \quad (3.26)$$

L'objectif est d'obtenir, par une combinaison linéaire entre ces deux formules, une nouvelle équation ne comportant plus de termes en $u''(a)$. En effectuant $4 \times (3.25) - (3.26)$ on obtient

$$4u(a+h) - u(a+2h) = 3u(a) + 2hu'(a) + \mathcal{O}(h^3)$$

On en déduit

$$u'(a) = \frac{-3u(a) + 4u(a+h) - u(a+2h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2). \quad (3.27)$$

De (3.15) et comme $x_0 = a$, $x_1 = a+h$, $x_2 = a+2h$ on a

$$\frac{-3u(x_0) + 4u(x_1) - u(x_2)}{2h} + \mathcal{O}(h^2) = \alpha$$

En oubliant le terme en $\mathcal{O}(h^2)$ on abouti au schéma

$$\frac{-3u_0 + 4u_1 - u_2}{2h} = \alpha \quad (3.28)$$

d. Le schéma global est

$$-3u_0 + 4u_1 - u_2 = 2\Delta x \alpha \quad (3.29)$$

$$-\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2} + c_i u_i = f_i, \quad \forall i \in \llbracket 0, N \llbracket \quad (3.30)$$

$$u_N = \beta \quad (3.31)$$

Il est d'ordre 2 car toutes les dérivées partielles ont été approchées à l'ordre 2.

R. 4 Les $N+1$ équations (3.29)-(3.31) sont linéaires en les $N+1$ inconnues $(u_i)_{i \in \llbracket 0, N \llbracket}$. En notant $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{N+1}$ le vecteur tel que $\mathbf{V}_i = u_{i-1}$, $\forall i \in \llbracket 1, N+1 \llbracket$ ces $N+1$ équations peuvent donc s'écrire sous la forme d'un système linéaire $\mathbb{A}\mathbf{V} = \mathbf{F}$ où la matrice $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{N+1}(\mathbb{R})$ et $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{N+1}$.

On choisi pour

- première ligne su système l'équation (3.29) (*portée* par le point x_0)
- dernière ligne (ligne $N+1$) l'équation (3.31) (*portée* par le point x_N)
- les lignes 2 à N , respectivement les équations (3.30) de $i=1$ à $i=N-1$.

Pour simplifier l'écriture du système, on peut multiplier (3.30) par Δx^2 et poser $D_i = 2 + \Delta x^2 c_i$ pour obtenir

$$D_i u_i - u_{i+1} - u_{i-1} = \Delta x^2 f_i \quad \forall i \in \llbracket 0, N \llbracket \quad (3.32)$$

On abouti alors au système linéaire suivant

$$\mathbb{A}\mathbf{U} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} -3 & 4 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ -1 & D_1 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & D_2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \dots & 0 & -1 & D_{N-2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & D_{N-1} & -1 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{N-2} \\ u_{N-1} \\ u_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha\Delta x \\ \Delta x^2 f(x_1) \\ \Delta x^2 f(x_2) \\ \vdots \\ \vdots \\ \Delta x^2 f(x_{N-2}) \\ \Delta x^2 f(x_{N-1}) \\ \beta \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{F}$$

R. 5 L'algorithme non détaillé est simple

- 1: Initialisation des données
- 2: Calcul de la matrice \mathbb{A}
- 3: Calcul du second membre \mathbf{F}
- 4: Résolution du système $\mathbb{A}\mathbf{V} = \mathbf{F}$.

Pour écrire l'algorithme détaillé, nous pouvons écrire par exemple deux fonctions l'une permettant de calculer la matrice \mathbb{A} et l'autre le second membre \mathbf{F} .

Pour cela, on peut écrire la fonction `AssembleMat1D` retournant une matrice $\mathbb{M} \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ définie par

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \beta & a_1 & \beta & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \beta & a_{d-2} & \beta \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \quad (3.33)$$

Dans ce cas la matrice \mathbb{A} de la question précédente n'est qu'un cas particulier de la matrice \mathbb{M} .

Toutefois, ce choix de fonction n'est pas unique et on aurait pu choisir une fonction retournant, par exemple, la matrice

$$\begin{pmatrix} -3 & 4 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \beta & a_1 & \beta & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \beta & a_{d-2} & \beta \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La fonction `AssembleMat1D` peut s'écrire:

Algorithme 3 Fonction `AssembleMat1D`

Données : d : dimension de la matrice,
 β, γ : deux réels,
 $\boldsymbol{\alpha}$, : un vecteur de \mathbb{R}^3 tel que $\boldsymbol{\alpha}(i) = \alpha_i$,
 \mathbf{a} , : un vecteur de \mathbb{R}^{d-2} tel que $\mathbf{a}(i) = a_i$,

Résultat : \mathbb{M} : matrice $d \times d$

```
1: Fonction  $x \leftarrow \text{AssembleMat1D}(d, \beta, \gamma, \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{a})$ 
2:  $\mathbb{M} \leftarrow \mathbb{0}_{d,d}$ 
3:  $\mathbb{M}(1, 1) \leftarrow \boldsymbol{\alpha}(1)$ ,  $\mathbb{M}(1, 2) \leftarrow \boldsymbol{\alpha}(2)$ ,  $\mathbb{M}(1, 3) \leftarrow \boldsymbol{\alpha}(3)$ 
4:  $\mathbb{M}(d, d) \leftarrow \beta$ 
5: Pour  $i \leftarrow 2$  à  $d - 1$  faire ▷ Initialisation de la ligne  $i$ 
6:    $\mathbb{M}(i, i) \leftarrow \boldsymbol{\alpha}(i - 1)$ ,  $\mathbb{M}(i, i - 1) \leftarrow \beta$ ,  $\mathbb{M}(i, i + 1) \leftarrow \beta$ 
7: Fin Pour
8: Fin Fonction
```

Ensuite on écrit la fonction `AssembleSM` retournant, par exemple, le vecteur $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^d$ défini par

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a \\ \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_{d-2} \\ b. \end{pmatrix} \quad (3.34)$$

Dans ce cas, le second membre du système linéaire de la question précédente peut être obtenu à partir de cette fonction. On peut toutefois noter que de nombreuses variantes peuvent être proposer.

La fonction `AssembleSM` s'écrit:

Algorithme 4 Fonction `AssembleSM`

Données : d : dimension du vecteur,
 a, b : deux réels,
 $\boldsymbol{\mu}$, : un vecteur de \mathbb{R}^3 tel que $\boldsymbol{\mu}(i) = \mu_i$,

Résultat : \mathbf{B} : vecteur de \mathbb{R}^d

```
1: Fonction  $\mathbf{B} \leftarrow \text{AssembleSM}(d, a, b, \boldsymbol{\mu})$ 
2:  $\mathbf{B} \leftarrow \mathbb{0}_{d,1}$ 
3:  $\mathbf{B}(1) \leftarrow a$ ,  $\mathbf{B}(d) \leftarrow b$ 
4: Pour  $i \leftarrow 2$  à  $d - 1$  faire
5:    $\mathbf{B}(i) \leftarrow \boldsymbol{\mu}(i - 1)$ 
6: Fin Pour
7: Fin Fonction
```

Un algorithme complet utilisant ces fonctions pourrait être

- 1: $a \leftarrow 0, b \leftarrow 1, f : x \mapsto 0, c : x \mapsto 1 + x.^2$
- 2: $\alpha \leftarrow 0, \beta \leftarrow 1$
- 3: $N \leftarrow 1000, h \leftarrow (b - a)/N, \mathbf{x} \leftarrow a : h : b$
- 4: $\mathbb{A} \leftarrow \text{AssembleMat1D}(N + 1, -1, 1, [-3, 4, 1], 2 + h * h * c(\mathbf{x}(2 : N)))$
- 5: $\mathbf{F} \leftarrow \text{AssembleSM}(N + 1, 2 * \alpha * h, \beta, h * h * f(\mathbf{x}(2 : N)))$
- 6: $\mathbf{V} \leftarrow \text{Solve}(\mathbb{A}, \mathbf{F})$

◇

EXERCICE 4 : exercice 2, partiel 2, 2019/2020

Soit l'E.D.P. suivante

$$-u''(x) + cu'(x) = f(x), \quad \forall x \in]a; b[, \quad (4.35)$$

$$-u'(a) + 3u(a) = \alpha, \quad (4.36)$$

$$u(b) = \beta. \quad (4.37)$$

où c est un réel strictement positif.

Q. 1 a. Que signifie l'abréviation E.D.P.?

b. Quelles sont les données du problème (4.35)-(4.37)? (préciser le type de chaque donnée : réel, entier, fonction, vecteur, ...)

c. Quelles sont les inconnues du problème (4.35)-(4.37)? (préciser le type)

d. Quelles sont les conditions initiales?

e. Quelles sont les conditions aux limites?

□

Q. 2 a. Expliciter la discrétisation régulière de $[a; b]$ avec N pas de discrétisation en espace.

b. Ecrire la fonction `DisReg` permettant de retourner cette discrétisation.

□

On note $x_i, i \in \llbracket 0, N \rrbracket$ cette discrétisation. On souhaite résoudre l'E.D.P. (4.35)-(4.37) à l'aide des schémas numériques

$$-\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + c \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} = f_i, \quad (4.38)$$

$$(3 + 6h)u_0 - 4u_1 + u_2 = 2h\alpha. \quad (4.39)$$

Q. 3 a. Expliquer en détail la façon d'obtenir le schéma (4.38) à partir de (4.35) et préciser ce que représentent les termes u_i, f_i, c et h ?

b. Expliquer en détail comment le schéma (4.39) a été obtenu à partir de (b).

c. Donner une discrétisation détaillée du problème (4.35) à (4.37) en utilisant les schémas (4.38) et (4.39).

d. Le schéma global est de quel ordre? Justifiez.

□

On note \mathbf{V} le vecteur de dimension $N + 1$, de composantes $V_i = u_{i-1}$, $\forall i \in \llbracket 1, N + 1 \rrbracket$.

Q. 4 Montrer que le vecteur \mathbf{V} est solution du système linéaire

$$\mathbb{A}\mathbf{V} = \mathbf{F} \quad (4.40)$$

en explicitant la matrice \mathbb{A} et le vecteur \mathbf{F} (préciser les dimensions).

□

Q. 5 Ecrire la fonction `Assemble` retournant la matrice $\mathbb{M} \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ définie par

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ r & s & w & 0 & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & r & s & w \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \nu_3 & \nu_2 & \nu_1 \end{pmatrix} \quad (4.41)$$

où $s, r, w, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \nu_1, \nu_2$ et ν_3 sont des réels donnés.

□

Q. 6 Ecrire un algorithme complet de résolution du problème (4.35) à (4.37) basé sur (4.40). (Utiliser au maximum les fonctions). On pourra utiliser la fonction $\mathbf{X} \leftarrow \text{Solve}(\mathbb{A}, \mathbf{B})$ retournant la solution du système linéaire $\mathbb{A}\mathbf{X} = \mathbf{B}$.

□

Correction

R. 1 a. Equations aux Dérivées Partielles,

b. a et b deux réels, $a < b$, $c \in \mathbb{R}^{+*}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

c. $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

d. aucune

e. (b) et (4.37)

R. 2 a. $(x_i)_{i=0}^N$ définis par $x_i = a + ih$ avec $h = (b - a)/N$.

Algorithme 5 Fonction **DisReg** : discrétisation régulière de $[a, b]$ avec $(N + 1)$ points

Données : a, b : deux réels, ($a < b$)

N : un entier non nul (nombre de pas de discrétisation).

Résultat : \mathbf{X} : vecteur de \mathbb{R}^{N+1} , $\mathbf{X}(i) = x_{i-1}$, $\forall i \in \llbracket 1, N + 1 \rrbracket$

- b. 1: **Fonction** $\mathbf{X} \leftarrow \text{DisReg}(a, b, N)$
2: $h \leftarrow (b - a)/N$
3: **Pour** $i \leftarrow 1$ à $N + 1$ **faire**
4: $\mathbf{X}(i) \leftarrow a + (i - 1) * h$
5: **Fin Pour**
6: **Fin Fonction**
-

R. 3 a. Expliquer en détail la façon d'obtenir le schéma (4.38) à partir de (4.35) et préciser ce que représentent les termes u_i , f_i , c et h ?

Soit $(x_i)_{i=0}^N$ la discrétisation régulière de $[a; b]$ avec N pas de discrétisation en espace.

L'équation (4.35) entraîne

$$-u''(x_i) + cu'(x_i) = f(x_i), \quad \forall i \in \llbracket 1, N - 1 \rrbracket. \quad (4.42)$$

Pour obtenir une approximation à l'ordre 2 de $u'(x)$, on effectue deux développements de Taylor en $x + h$ et en $x - h$:

$$\begin{aligned} u(x + h) &= u(x) + h u^{(1)}(x) + \frac{h^2}{2} u^{(2)}(x) + \mathcal{O}(h^3), \\ u(x - h) &= u(x) - h u^{(1)}(x) + \frac{h^2}{2} u^{(2)}(x) + \mathcal{O}(h^3). \end{aligned}$$

On effectuant la différence entre ces deux équations on obtient:

$$u(x + h) - u(x - h) = 2h u^{(1)}(x) + \mathcal{O}(h^3)$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} u^{(1)}(x) &= \frac{u(x + h) - u(x - h)}{2h} + \frac{1}{2h} \mathcal{O}(h^3) \\ &= \frac{u(x + h) - u(x - h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \end{aligned}$$

Pour obtenir une approximation à l'ordre 2 de $u''(x)$, on effectue aussi deux développements de Taylor en $x + h$ et en $x - h$

$$\begin{aligned} u(x + h) &= u(x) + h u^{(1)}(x) + \frac{h^2}{2} u^{(2)}(x) + \frac{h^3}{3} u^{(3)}(x) + \mathcal{O}(h^4), \\ u(x - h) &= u(x) - h u^{(1)}(x) + \frac{h^2}{2} u^{(2)}(x) - \frac{h^3}{3} u^{(3)}(x) + \mathcal{O}(h^4). \end{aligned}$$

On effectuant la somme entre ces deux équations on obtient:

$$u(x + h) + u(x - h) = 2u(x) + h^2 u^{(2)}(x) + \mathcal{O}(h^4)$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} u^{(2)}(x) &= \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} + \frac{1}{h^2} \mathcal{O}(h^4) \\ &= \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2) \end{aligned}$$

En remplaçant dans (4.42), on a de manière équivalente

$$-\frac{u(x_i+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2) + c \frac{u(x_i+h) - u(x_i-h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2) = f(x_i).$$

En oubliant les $\mathcal{O}(h^2)$ dans l'équation précédente, on obtient une équation approchée, et en notant $u_i \approx u(x_i)$ on abouti à (4.38) avec $f_i = f(x_i)$.

- b. Pour obtenir une approximation à l'ordre 2 de $u'(a)$, on effectue deux développements de Taylor en $a+h$ et en $a+2h$:

$$u(a+h) = u(a) + h \frac{du}{dx}(a) + \frac{h^2}{2!} \frac{d^2u}{dx^2}(a) + \mathcal{O}(h^3) \quad (4.43)$$

et

$$u(a+2h) = u(a) + (2h) \frac{du}{dx}(a) + \frac{(2h)^2}{2!} \frac{d^2u}{dx^2}(a) + \mathcal{O}(h^3) \quad (4.44)$$

L'objectif est d'obtenir, par une combinaison linéaire entre ces deux formules, une nouvelle équation ne comportant plus de termes en $\frac{d^2u}{dx^2}$. En effectuant $4 \times (4.43) - (4.44)$ on obtient

$$4u(a+h) - u(a+2h) = 3u(a) + 2h \frac{du}{dx}(a) + \mathcal{O}(h^3)$$

Comme $x_0 = a$, $x_1 = a+h$ et $x_2 = a+2h$, on en déduit

$$\frac{du}{dx}(a) = \frac{-3u(x_0) + 4u(x_1) - u(x_2)}{2h} + \mathcal{O}(h^2)$$

L'équation devient alors

$$-\frac{-3u(x_0) + 4u(x_1) - u(x_2)}{2h} + \mathcal{O}(h^2) + 3u(x_0) = \alpha$$

En oubliant le $\mathcal{O}(h^2)$ dans l'équation précédente, on obtient l'équation approchée

$$-\frac{-3u_0 + 4u_1 - u_2}{2h} + 3u_0 = \alpha$$

qui s'écrit aussi

$$(3 + 6h)u_0 - 4u_1 + u_2 = 2h\alpha.$$

- c. On doit résoudre

$$(3 + 6h)u_0 - 4u_1 + u_2 = 2h\alpha, \quad (4.45)$$

$$-\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + c \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} = f_i, \quad \forall i \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket \quad (4.46)$$

$$u_N = \beta. \quad (4.47)$$

d. Le schéma global est d'ordre 2 car toutes les approximations des dérivées ont été effectuées avec une approximation en $\mathcal{O}(h^2)$.

R. 4 Les (4.45)-(4.47) forment un système de $(N + 1)$ équations linéaires à $(N + 1)$ inconnues, les $(u_i)_{i=0}^N$: on peut donc l'écrire sous forme matricielle chacune des équations correspondant à une ligne du système. Pour alléger les écritures on note que (4.46) peut se récrire

$$\mu_+ u_{i+1} + 2u_i + \mu_- u_{i-1} = h^2 f(x_i)$$

avec $\mu_+ = -1 + ch^2$, et $\mu_- = -(1 + ch^2)$. Les équations discrétisées peuvent s'écrire avec $\gamma = 3 + 6h$

$$\left\{ \begin{array}{lll} \gamma u_0 - 4u_1 + u_2 & = & 2h\alpha & \leftarrow \text{eq. en } x_0 \\ \mu_+ u_2 + 2u_1 + \mu_- u_0 & = & h^2 f(x_1) & \leftarrow \text{eq. en } x_1 \\ \mu_+ u_3 + 2u_2 + \mu_- u_1 & = & h^2 f(x_2) & \leftarrow \text{eq. en } x_2 \\ & & \vdots & \\ \mu_+ u_{N-1} + 2u_{N-2} + \mu_- u_{N-3} & = & h^2 f(x_{N-2}) & \leftarrow \text{eq. en } x_{N-2} \\ \mu_+ u_N + 2u_{N-1} + \mu_- u_{N-2} & = & h^2 f(x_{N-1}) & \leftarrow \text{eq. en } x_{N-1} \\ u_N & = & \beta & \leftarrow \text{eq. en } x_N \end{array} \right.$$

Le système linéaire équivalent à (4.45)-(4.47) peut alors s'écrire sous la forme matricielle suivante où la i -ème ligne du système ($i \in \llbracket 1, N + 1 \rrbracket$) correspond à l'équation en x_{i-1} :

$$\mathbb{A} \mathbf{U} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\begin{array}{cccccccc|cccc} \gamma & -4 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & u_0 & & & \\ \mu_+ & 2 & \mu_- & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & u_1 & & & \\ 0 & \mu_+ & 2 & \mu_- & 0 & \dots & 0 & 0 & u_2 & & & \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & & & \\ \vdots & 0 & \dots & 0 & \mu_+ & 2 & \mu_- & 0 & u_{N-2} & & & \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & \mu_+ & 2 & \mu_- & u_{N-1} & & & \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & u_N & & & \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} 2h\alpha \\ h^2 f(x_1) \\ h^2 f(x_2) \\ \vdots \\ h^2 f(x_{N-2}) \\ h^2 f(x_{N-1}) \\ \beta \end{array} \right) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{B} \quad (4.48)$$

R. 5 Voici une version possible:

Algorithme 6 Fonction *Assemble*

Données : d : dimension de la matrice,
 $\boldsymbol{\mu}$, : un vecteur de \mathbb{R}^3 , $\boldsymbol{\mu}(i) = \mu_i, \forall i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$,
 $\boldsymbol{\nu}$, : un vecteur de \mathbb{R}^3 , $\boldsymbol{\nu}(i) = \nu_i, \forall i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$,
 r, s, w : trois réels

Résultat : \mathbb{M} : matrice $d \times d$

```
1: Fonction  $\mathbb{M} \leftarrow \text{Assemble}(d, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\nu}, r, s, w)$ 
2:  $\mathbb{M} \leftarrow \mathbb{0}_{d,d}$ 
3:  $k \leftarrow d$ 
4: Pour  $i = 1$  à 3 faire
5:    $\mathbb{M}(1, i) \leftarrow \mu(i)$ ,
6:    $\mathbb{M}(d, k) \leftarrow \nu(i)$ ,
7:    $k \leftarrow k - 1$ 
8: Fin Pour
9: Pour  $i = 2$  à  $d - 1$  faire ▷ Initialisation de la ligne  $i$ 
10:    $\mathbb{M}(i, i) \leftarrow s, \mathbb{M}(i, i - 1) \leftarrow r, \mathbb{M}(i, i + 1) \leftarrow w$ 
11: Fin Pour
12: Fin Fonction
```

R. 6 Un algorithme complet peut se présenter sous la forme:

```
1:  $a \leftarrow 0, b \leftarrow 2 * \pi, c \leftarrow 1$ 
2:  $f \leftarrow (x \mapsto 5x^2 \cos(x^2) + 2 \sin(x^2))$ 
3:  $alpha \leftarrow -2, beta \leftarrow 2,$  ▷ C.L.
4:  $\boldsymbol{x} \leftarrow \text{DisReg}(a, b, 500)$ 
5:  $h \leftarrow (b - a) / N$ 
6:  $\mathbb{A} \leftarrow \text{AssembleMat1D}(N + 1, \begin{pmatrix} 3 + 6h \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, -1 + c * h * h, 2, -1 - c * h * h)$ 
7:  $\boldsymbol{F} \leftarrow h * h * f(\boldsymbol{x})$  ▷ vectorisé
8:  $\boldsymbol{F}(1) \leftarrow 2 * h * alpha$ 
9:  $\boldsymbol{F}(N + 1) \leftarrow beta$ 
10:  $\boldsymbol{U} \leftarrow \text{Solve}(\mathbb{A}, \boldsymbol{F})$ 
```

◇