Méthodes Numériques II
Chapitre 4: Equations aux Dérivées Partielles
Exercices - épisode 1 version du 2025/02/13 à 05:51:27

Exercice 1 : schéma étudié en cours

Q. 1 *Ecrire la fonction* AssembleMat1D *retournant la matrice* $\mathbb{M} \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ *définie par*

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \beta & \alpha_1 & \beta & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \beta & \alpha_{d-2} & \beta \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

où $\alpha_1, \dots, \alpha_{d-2}$, β *et* γ *sont des réels donnés.* □

Algorithme 1 Fonction AssembleMat1D

Données : d : dimension de la matrice,
$\boldsymbol{\alpha}$: un vecteur de $\mathbb{R}^{d-2}$,
β, γ : deux réels

Résultat : $\mathbb{M}$: matrice $d \times d$

R. 1
1: **Fonction** $\mathbb{M} \leftarrow$ AssembleMat1D($d, \boldsymbol{\alpha}, \beta, \gamma$)
2: $\mathbb{M} \leftarrow \mathbb{0}_{d,d}$
3: $\mathbb{M}(1,1) \leftarrow \gamma$, $\mathbb{M}(d,d) \leftarrow \gamma$,
4: **Pour** $i = 2$ **à** $d-1$ **faire** ▷ Initialisation de la ligne i
5: $\mathbb{M}(i,i) \leftarrow \boldsymbol{\alpha}(i-1)$, $\mathbb{M}(i,i-1) \leftarrow \beta$, $\mathbb{M}(i,i+1) \leftarrow \beta$
6: **Fin Pour**
7: **Fin Fonction**

On souhaite résoudre par un schéma aux différences finies l'EDP suivante:

$$\begin{aligned} -u'' + cu &= f \quad \text{in }]a,b[, \\ u(a) &= \alpha \in \mathbb{R}, \\ u(b) &= \beta \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

où $c : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ et $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$.
On note $(x_i)_{i=0}^N$ la discrétisation régulière de $[a,b]$ avec N pas de discrétisation. Le schéma d'ordre 2 suivant

$$\begin{aligned} u_0 &= \alpha, && (1.2)\\ -\frac{u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}}{h^2} + c(x_i)u_i &= f(x_i) \quad \forall i \in]\!]0,N[\![, && (1.3)\\ u_N &= \beta. && (1.4) \end{aligned}$$

vérifie

$$\max_{i\in[\![0,N]\!]} |u(x_i)-u_i| = \mathcal{O}(h^2). \tag{1.5}$$

On note $\boldsymbol{V}$ le vecteur de dimension $N+1$, de composantes $\boldsymbol{V}_i = u_{i-1}$, $\forall i \in [\![1, N+1]\!]$.

Q. 2 *Montrer que* (1.2)-(1.4) *est équivalent à resoudre un système linéaire*

$$\mathbb{A}\boldsymbol{V} = \boldsymbol{F} \tag{1.6}$$

ou l'on explicitera la matrice $\mathbb{A}$ *et le vecteur* $\boldsymbol{F}$ *en précisant les dimensions.* □

R. 2 Les (1.2)-(1.4) forment un système de $(N+1)$ équations linéaires à $(N+1)$ inconnues, les $(u_i)_{i=0}^N$: on peut donc l'écrire sous forme matricielle chacune des équations correspondant à une ligne du système. Pour alléger les écritures on note que (**??**) peut se récrire

$$-u_{i+1} + \mu_i u_i - u_{i-1} = h^2 f(x_i)$$

avec $\mu_i = 2 + c(x_i)h^2$. Les équations discrétisées peuvent s'écrire

$$\left\{\begin{array}{lcll} u_0 & = & \alpha & \leftarrow \text{eq. en } x_0\\ -u_2+\mu_1u_1-u_0 & = & h^2f(x_1) & \leftarrow \text{eq. en } x_1\\ -u_3+\mu_2u_2-u_1 & = & h^2f(x_2) & \leftarrow \text{eq. en } x_2\\ & \vdots & & \\ -u_{N-1}+\mu_{N-2}u_{N-2}-u_{N-3} & = & h^2f(x_{N-2}) & \leftarrow \text{eq. en } x_{N-2}\\ -u_N+\mu_{N-1}u_{N-1}-u_{N-2} & = & h^2f(x_{N-1}) & \leftarrow \text{eq. en } x_{N-1}\\ u_N & = & \beta & \leftarrow \text{eq. en } x_N \end{array}\right.$$

En multipliant les équations en x_0 et en x_N par h^2, le système linéaire équivalent à (**??**)-(**??**) peut alors s'écrire sous la forme matricielle suivante

$$\mathbb{A}\boldsymbol{U} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\begin{array}{c|ccccccc|c} h^2 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0\\ \hline -1 & \mu_1 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0\\ 0 & -1 & \mu_2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots\\ \vdots & 0 & \dots & 0 & -1 & \mu_{N-2} & -1 & 0\\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & \mu_{N-1} & -1\\ \hline 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & h^2 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} u_0\\ \hline u_1\\ u_2\\ \vdots\\ \vdots\\ u_{N-2}\\ u_{N-1}\\ \hline u_N \end{array}\right) = h^2 \left(\begin{array}{c} \alpha\\ \hline f(x_1)\\ f(x_2)\\ \vdots\\ \vdots\\ f(x_{N-2})\\ f(x_{N-1})\\ \hline \beta \end{array}\right) \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{B} \tag{1.7}$$

Q. 3 a. *Ecrire une fonction algorithmique* solvePDE *permettant de résoudre l'EDP précédente par le schéma* (1.2)-(1.4). *On pourra utiliser la fonction* $\boldsymbol{X} \leftarrow$ Solve$(\mathbb{A}, \boldsymbol{B})$ *retournant la solution du système linéaire* $\mathbb{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$.

b. *En choisissant jeu de données pertinant et non trivial avec solution exacte, écrire un programme algorithmique permettant d'obtenir la solution numérique donnée par le schéma* (1.2)-(1.4) *et de calculer* $E = \max_{i \in [\![0,N]\!]} |u(x_i) - u_i|$.

□

R. 3 a. Il nous faut résoudre le système (4.47) avec le jeu de données. On peut par exemple écrire la fonction solvePDE qui a partir du jeu de données et du nombre de discrétisation N va nous retourner le vecteur solution de (4.47).

Algorithme 2 Fonction solvePDE : résolution de l'EDP (**??**)-(**??**) par le schéma aux différences finies (**??**)-(**??**)

Données : a, b : $a < b$,
c : fonction de $[a, b]$ à valeurs réelles positives ,
α, β : deux réels,
f : fonction de $[a, b]$ à valeurs réelles,
N : nombre de discrétisation

Résultat : $\boldsymbol{x}$: vecteur de $\mathbb{R}^{N+1}$, discrétisation régulière de l'intervalle $[a, b]$, avec $N + 1$ points. $\boldsymbol{x}(i + 1) = x_i$.
$\boldsymbol{U}$: vecteur de $\mathbb{R}^{N+1}$ tel que $\boldsymbol{U}(i + 1) \approx u(x_i)$

Fonction $[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{U}] \leftarrow$ solvePDE($a, b, \alpha, \beta, c, f, N$)
  $\boldsymbol{x} \leftarrow$ DisReg(a, b, N)
  $h \leftarrow (b - a)/N$
  $\boldsymbol{B}(1) \leftarrow h^2\alpha$, $\boldsymbol{B}(N + 1) \leftarrow h^2\beta$
  Pour $i = 2$ **à** N **faire** ▷ Initialisation de la ligne i de $\boldsymbol{B}$
    $\boldsymbol{B}(i) \leftarrow h^2 f(\boldsymbol{x}(i))$
    $\boldsymbol{\mu}(i - 1) \leftarrow 2 + h^2 c(\boldsymbol{x}(i))$
  Fin Pour
  $\mathbb{A} \leftarrow$ AssembleMat1D$(N + 1, \boldsymbol{\mu}, -1, h^2)$
  $\boldsymbol{U} \leftarrow$ Solve$(\mathbb{A}, \boldsymbol{B})$
Fin Fonction

---

b. Il nous faut donc choisir les données pour avoir une solution analytique. En fait, pour cela, on choisit une fonction u suffisament régulière, par exemple $u(x) = \cos(x^2)$. Ensuite on fixe la fonction $c(x) = x^2$ par exemple. On peut alors déterminer la fonction f qui est donnée par $f(x) = -u''(x) + c(x)u(x)$. On obtient ainsi $f(x) = 5x^2 \cos(x^2) + 2\sin(x^2)$. Les conditions aux limites sont alors $u(a) = \cos(a^2)$ et $u(b) = \cos(b^2)$.

$a \leftarrow 0$, $b \leftarrow 2 * \pi$

$u_{\text{ex}} \leftarrow \big(x \mapsto \cos(x^2)\big)$
$c \leftarrow \big(x \mapsto x^2\big)$
$f \leftarrow \big(x \mapsto 5x^2\cos(x^2) + 2\sin(x^2)\big)$
$[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{U}] \leftarrow \text{solvePDE}(a, b, -1, 1, c, f, 500)$
$E \leftarrow \text{max}\big(\text{abs}(\boldsymbol{U} - u_{\text{ex}}(\boldsymbol{x}))\big)$

Q. 4 *En choisissant judicieusement un jeu de données écrire un programme permettant de vérifier l'ordre du schéma utilisé à l'aide de la formule* (**??**). □

R. 4 On reprend l'EDP avec solution exacte de la question précédente. Pour un N donné, on note $(x_i)_{i=0}^N$ la discrétisation régulière, $h = (b-a)/N$ et

$$E(h) = \max_{n \in [\![0,N]\!]} |u_i - u_{\text{ex}}(x_i)|.$$

On a alors, d'après l'énoncé, $E(h) = \mathcal{O}(h^2) \approx Ch^2$ quand h est suffisament petit. On utilise alors une échelle logarithmique pour représenter la courbe. En effet, on a

$$\log E(h) \approx \log(Ch^2) = \log(C) + 2\log(h)$$

En posant $X = \log(h)$ et $Y = \log E(h)$, coordonnées en échelle logarithmique, on a

$$Y \approx \log(C) + 2X$$

qui est l'équation d'une droite. La pente de cette droite est donc l'ordre du schéma.

$a \leftarrow 0$, $b \leftarrow 2 * \pi$
$u_{\text{ex}} \leftarrow \big(x \mapsto \cos(x^2)\big)$
$c \leftarrow \big(x \mapsto x^2\big)$
$f \leftarrow \big(x \mapsto 5x^2\cos(x^2) + 2\sin(x^2)\big)$
$LN \leftarrow 100 : 50 : 1000$
$nLN \leftarrow \text{length}(LN)$
$H \leftarrow \mathbb{0}_{nLN}$, ▷ pour stocker les h
$E \leftarrow \mathbb{0}_{nLN}$, ▷ pour stocker les erreurs
Pour $k \leftarrow 1$ **à** nLN **faire**
  $N \leftarrow LN(k)$
  $[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{U}] \leftarrow \text{SolvePDE}(a, b, -1, 1, c, f, 500)$
  $E(k) \leftarrow \text{max}\big(\text{abs}(\boldsymbol{U} - u_{\text{ex}}(\boldsymbol{x}))\big)$
  $H(k) \leftarrow (b-a)/N$
Fin Pour
... ▷ Representation graphique

Exercice 2 : énoncé du cours

Soit φ une fonction suffisament régulière et $h > 0$

Q. 1 *Montrer que*

$$\frac{d\varphi}{dx}(x) = \frac{-3\varphi(x) + 4\varphi(x+h) - \varphi(x+2h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \tag{2.8}$$

□

R. 1 Soit φ une fonction suffisament régulière et $h > 0$
Pour celà, on écrit les deux développements de Taylor en $x + h$ et $x + 2h$.
Il existe $\xi_1^+ \in]x, x+h[$ tel que

$$\varphi(x+h) = \varphi(x) + h\frac{d\varphi}{dx}(x) + \frac{h^2}{2!}\frac{d^2\varphi}{dx^2}(x) + \frac{h^3}{3!}\frac{d^3\varphi}{dx^3}(\xi_1^+) \tag{2.9}$$

et Il existe $\xi_2^+ \in]x, x+2h[$ tel que

$$\varphi(x+2h) = \varphi(x) + (2h)\frac{d\varphi}{dx}(x) + \frac{(2h)^2}{2!}\frac{d^2\varphi}{dx^2}(x) + \frac{(2h)^3}{3!}\frac{d^3\varphi}{dx^3}(\xi_2^+) \tag{2.10}$$

L'objectif est d'obtenir, par une combinaison linéaire entre ces deux formules, une nouvelle équation ne comportant plus de termes en $\frac{d^2\varphi}{dx^2}$. En effectuant $4 \times (4.41) - (4.42)$ on obtient

$$4\varphi(x+h) - \varphi(x+2h) = 3\varphi(x) + 2h\frac{d\varphi}{dx}(x) + 4\frac{h^3}{3!}\frac{d^3\varphi}{dx^3}(\xi_1^+) - \frac{(2h)^3}{3!}\frac{d^3\varphi}{dx^3}(\xi_2^+)$$

On en déduit

$$\frac{d\varphi}{dx}(x) = \frac{-3\varphi(x) + 4\varphi(x+h) - \varphi(x+2h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2)$$

Q. 2 *Montrer que*

$$\frac{d\varphi}{dx}(x) = \frac{3\varphi(x) - 4\varphi(x-h) + \varphi(x-2h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \tag{2.11}$$

□

R. 2 Soit φ une fonction suffisament régulière et $h > 0$.
Pour celà, on écrit les deux développements de Taylor en $x - h$ et $x - 2h$.
Il existe $\xi_1^- \in]x-h, x[$ tel que

$$\varphi(x-h) = \varphi(x) - h\frac{d\varphi}{dx}(x) + \frac{(-h)^2}{2!}\frac{d^2\varphi}{dx^2}(x) + \frac{(-h)^3}{3!}\frac{d^3\varphi}{dx^3}(\xi_1^-) \tag{2.12}$$

et Il existe $\xi_2^- \in]x-2h, x[$ tel que

$$\varphi(x-2h) = \varphi(x) + (-2h)\frac{d\varphi}{dx}(x) + \frac{(-2h)^2}{2!}\frac{d^2\varphi}{dx^2}(x) + \frac{(-2h)^3}{3!}\frac{d^3\varphi}{dx^3}(\xi_2^+) \tag{2.13}$$

L'objectif est d'obtenir, par une combinaison linéaire entre ces deux formules, une nouvelle équation ne comportant plus de termes en $\frac{d^2\varphi}{dx^2}$. En effectuant $4 \times (2.12) - (2.13)$ on obtient

$$4\varphi(x-h) - \varphi(x-2h) = 3\varphi(x) - 2h\frac{d\varphi}{dx}(x) + 4\frac{(-h)^3}{3!}\frac{d^3\varphi}{dx^3}(\xi_1^-) - \frac{(-2h)^3}{3!}\frac{d^3\varphi}{dx^3}(\xi_2^-)$$

On en déduit

$$\frac{d\varphi}{dx}(x) = \frac{3\varphi(x) - 4\varphi(x-h) + \varphi(x-2h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2)$$

Q. 3 *Déterminer une formule permettant de calculer une approximation à l'ordre 2 de* $\frac{d^2\varphi}{dx^2}(x)$ *en utilisant uniquement des valeurs de la fonction* φ *aux points* $x + ih$ *avec* $i \in \mathbb{N}$.

□

Q. 4 *Déterminer une formule permettant de calculer une approximation à l'ordre 2 de* $\frac{d^2\varphi}{dx^2}(x)$ *en utilisant uniquement des valeurs de la fonction* φ *aux points* $x - ih$ *avec* $i \in \mathbb{N}$.

□

Exercice 3 : énoncé du cours

Soit le problème suivant

$$\begin{aligned} -u''(x) + c(x)u(x) &= f(x), \ \forall x \in]a;b[, && (3.14) \\ u'(a) &= \alpha, && (3.15) \\ u(b) &= \beta. && (3.16) \end{aligned}$$

où c est une fonction positive.

Q. 1 a. *Quelles sont les données du problème* (3.14)-(3.16)*? (préciser le type de chaque donnée : réel, entier, fonction, vecteur, ...)*

b. *Quelles sont les inconnues du problème* (3.14)-(3.16)*? (préciser le type)*

c. *Quelles sont les conditions initiales?*

d. *Quelles sont les conditions aux limites?*

□

R. 1 a. Les données du problème (3.14)-(3.16) sont :

Données :	a, b	:	deux réels, $a < b$
	α, β	:	deux réels,
	c	:	une fonction $x : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $c(x) \geqslant 0$,
	f	:	une fonction $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$

b. L'inconnue du problème (3.14)-(3.16) est la fonction u, $u : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$.

c. Il n'y a pas de condition initiale, le problème étant stationnaire!

d. Les conditions aux limites sont (3.15) (appelée condition de Neumann) et (3.16) (appelée condition de Dirichlet).

Q. 2 *Construire une discrétisation régulière de $[a;b]$ avec N pas de discrétisation en espace.* □

R. 2 Soit $\Delta_x = (b-a)/N$. La discrétisation régulière de l'intervalle $[a;b]$ avec N pas de discrétisation est l'ensemble des points x_i, $i \in [\![0, N]\!]$ tel que

$$x_i = a + i\Delta_x, \quad \forall i \in [\![0, N]\!]$$

On note x_i, $i \in [\![0, N]\!]$ cette discrétisation. On souhaite résoudre (3.14) à l'aide du schéma numérique

$$-\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2} + c_i u_i = f_i. \tag{3.17}$$

Q. 3 a. *Expliquer comment le schéma (3.17) a été obtenu à partir de (3.14) et préciser ce que représente les termes u_i, f_i, c_i et Δx?*

b. *Donner l'ensemble $\mathcal{E}$ des valeurs que peut prendre i dans le schéma (3.14).*

c. *Construire une discrétisation des conditions aux limites d'ordre 2 au moins.*

d. *Le schéma global est de quel ordre? Justifiez.*

□

R. 3 a. De (3.14), on déduit

$$-u''(x_i) + c(x_i)u(x_i) = f(x_i), \quad \forall i \in [\![0, N]\!] \tag{3.18}$$

En utilisant deux développements de Taylor à l'ordre 4 en $x+h \in [a, b]$ et $x-h \in [a, b]$ on obtient

$$u(x+h) = u(x) + hu'(x) + \frac{h^2}{2!}u''(x) + \frac{h^3}{3!}u^{(3)}(x) + \mathcal{O}(h^4) \tag{3.19}$$

$$u(x-h) = u(x) - hu'(x) + \frac{(-h)^2}{2!}u''(x) + \frac{(-h)^3}{3!}u^{(3)}(x) + \mathcal{O}(h^4). \tag{3.20}$$

En sommant ces deux équations, on abouti a

$$u(x+h) + u(x-h) = 2u(x) + h^2 u''(x) + \mathcal{O}(h^4)$$

et donc

$$u''(x) = \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2).$$

Cette dernière équation peut s'appliquer en $x = x_i$ avec $h = \Delta x$ pour tout $i \in]\!]0, N[\![$ et on a alors

$$u''(x_i) = \frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1})}{\Delta x^2} + \mathcal{O}(\Delta x^2). \tag{3.21}$$

En remplaçant, dans (3.22), $u''(x_i)$ par l'expression précédente on obtient

$$\frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1})}{\Delta x^2} + \mathcal{O}(\Delta x^2) + c(x_i)u(x_i) = f(x_i), \quad \forall i \in]\!]0, N[\![\qquad (3.22)$$

Il faut noter qu'il n'est pas possible d'utiliser cette relation en $i = 0$ ou en $i = N$. Le schéma (3.17) est donc une approximation de (3.22) où l'on a *oublié* le terme en $\mathcal{O}(\Delta x^2)$ et noté $u_i \approx u(x_i)$, $c_i = c(x_i)$ et $f_i = f(x_i)$.

b. On a $\mathcal{E} =]\!]0, N[\![$.

c. On note $h = \Delta_x$. La condition de Dirichlet (3.16) s'écrit de manière exacte

$$u_N = u(x_N) = \beta. \qquad (3.23)$$

Pour la condition de Neumann (3.15) il va falloir travailler un peu et déterminer une approximation de la dérivée première de u en $a = x_0$ d'ordre 2. Pour celà, on écrit les deux développements de Taylor en $a + h = x_1$ et $a + 2h = x_2$.

$$u(a + h) = u(a) + hu'(a) + \frac{h^2}{2!}u''(a) + \mathcal{O}(h^3), \qquad (3.24)$$

$$u(a + 2h) = u(a) + (2h)u'(a) + \frac{(2h)^2}{2!}u''(a) + \mathcal{O}(h^3). \qquad (3.25)$$

L'objectif est d'obtenir, par une combinaison linéaire entre ces deux formules, une nouvelle équation ne comportant plus de termes en $u''(a)$. En effectuant $4 \times (3.24) - (3.25)$ on obtient

$$4u(a + h) - u(a + 2h) = 3u(a) + 2hu'(a) + \mathcal{O}(h^3)$$

On en déduit

$$u'(a) = \frac{-3u(a) + 4u(a + h) - u(a + 2h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2). \qquad (3.26)$$

De (3.15) et comme $x_0 = a$, $x_1 = a + h$, $x_2 = a + 2h$ on a

$$\frac{-3u(x_0) + 4u(x_1) - u(x_2)}{2h} + \mathcal{O}(h^2) = \alpha$$

En oubliant le terme en $\mathcal{O}(h^2)$ on abouti au schéma

$$\frac{-3u_0 + 4u_1 - u_2}{2h} = \alpha \qquad (3.27)$$

d. Le schéma global est

$$-3u_0 + 4u_1 - u_2 = 2\Delta x \alpha \qquad (3.28)$$

$$-\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2} + c_i u_i = f_i, \quad \forall i \in]\!]0, N[\![\qquad (3.29)$$

$$u_N = \beta \qquad (3.30)$$

Il est d'ordre 2 car toutes les dérivées partielles ont été approchées à l'ordre 2.

On note $\boldsymbol{V}$ le vecteur de dimension $N+1$, de composantes $\boldsymbol{V}_i = u_{i-1}$, $\forall i \in [\![1, N+1]\!]$.

Q. 4 *Montrer que le vecteur* $\boldsymbol{V}$ *est solution du système linéaire*

$$\mathbb{A}\boldsymbol{V} = \boldsymbol{F} \tag{3.31}$$

en explicitant la matrice $\mathbb{A}$ *et le vecteur* $\boldsymbol{F}$ *(préciser les dimensions).* □

R. 4 Les $N+1$ équations (3.28)-(3.30) sont linéaires en les $N+1$ inconnues $(u_i)_{i\in[\![0,N]\!]}$. En notant $\boldsymbol{V} \in \mathbb{R}^{N+1}$ le vecteur tel que $\boldsymbol{V}_i = u_{i-1}$, $\forall i \in [\![1, N+1]\!]$ ces $N+1$ équations peuvent donc s'écrire sous la forme d'un système linéaire $\mathbb{A}\boldsymbol{V} = \boldsymbol{F}$ où la matrice $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{N+1}(\mathbb{R})$ et $\boldsymbol{F} \in \mathbb{R}^{N+1}$.
On choisi pour

- première ligne su système l'équation (3.28) (*portée* par le point x_0)
- dernière ligne (ligne $N+1$) l'équation (3.30) (*portée* par le point x_N)
- les lignes 2 à N, respectivement les équations (3.29) de $i = 1$ à $i = N-1$.

Pour simplifier l'écriture du système, on peut multiplier (3.29) par Δx^2 et poser $D_i = 2 + \Delta x^2 c_i$ pour obtenir

$$D_i u_i - u_{i+1} - u_{i-1} = \Delta x^2 f_i \quad \forall i \in]\!]0, N[\![\tag{3.32}$$

On abouti alors au système linéaire suivant

$$\mathbb{A}\boldsymbol{U} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\begin{array}{c|cccccc|c} -3 & 4 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \hline -1 & D_1 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & D_2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \dots & 0 & -1 & D_{N-2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & D_{N-1} & -1 \\ \hline 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} u_0 \\ \hline u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{N-2} \\ u_{N-1} \\ \hline u_N \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} 2\alpha\Delta x \\ \hline \Delta x^2 f(x_1) \\ \Delta x^2 f(x_2) \\ \vdots \\ \vdots \\ \Delta x^2 f(x_{N-2}) \\ \Delta x^2 f(x_{N-1}) \\ \hline \beta \end{array}\right) \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{F}$$

Q. 5 *Ecrire un algorithme complet de résolution du problème* (3.14) *à* (3.16) *basé sur* (3.31)*. (Utiliser au maximum les fonctions). On pourra utiliser la fonction* $\boldsymbol{X} \leftarrow \text{Solve}(\mathbb{A}, \boldsymbol{B})$ *retournant la solution du système linéaire* $\mathbb{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$. □

R. 5 L'algorithme non détaillé est simple

Initialisation des données
Calcul de la matrice $\mathbb{A}$
Calcul du second membre $\boldsymbol{F}$
Résolution du système $\mathbb{A}\boldsymbol{V} = \boldsymbol{F}$.

Pour écrire l'algorithme détaillé, nous pouvons écrire par exemple deux fonctions l'une permettant de calculer la matrice $\mathbb{A}$ et l'autre le second membre $\boldsymbol{F}$.
Pour celà, on peut écrire la fonction AssembleMat1D retournant une matrice $\mathbb{M} \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ définie par

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \beta & a_1 & \beta & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \beta & a_{d-2} & \beta \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \tag{3.33}$$

Dans ce cas la matrice $\mathbb{A}$ de la question précédente n'est qu'un cas particulier de la matrice $\mathbb{M}$.
Toutefois, ce choix de fonction n'est pas unique et on aurait pu choisir une fonction retournant, par exemple, la matrice

$$\begin{pmatrix} -3 & 4 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \beta & a_1 & \beta & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \beta & a_{d-2} & \beta \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La fonction AssembleMat1D peut s'écrire:

Algorithme 3 Fonction AssembleMat1D

Données :
- d : dimension de la matrice,
- β, γ : deux réels,
- $\boldsymbol{\alpha}$, : un vecteur de $\mathbb{R}^3$ tel que $\boldsymbol{\alpha}(i) = \alpha_i$,
- $\boldsymbol{a}$, : un vecteur de $\mathbb{R}^{d-2}$ tel que $\boldsymbol{a}(i) = a_i$,

Résultat : $\mathbb{M}$: matrice $d \times d$

Fonction $x \leftarrow$ AssembleMat1D($d, \beta, \gamma, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{a}$)
  $\mathbb{M} \leftarrow \mathbb{0}_{d,d}$
  $\mathbb{M}(1,1) \leftarrow \boldsymbol{\alpha}(1)$, $\mathbb{M}(1,2) \leftarrow \boldsymbol{\alpha}(2)$, $\mathbb{M}(1,3) \leftarrow \boldsymbol{\alpha}(3)$
  $\mathbb{M}(d,d) \leftarrow \beta$
  Pour $i \leftarrow 2$ **à** $d-1$ **faire** ▷ Initialisation de la ligne i
    $\mathbb{M}(i,i) \leftarrow \boldsymbol{a}(i-1)$, $\mathbb{M}(i,i-1) \leftarrow \beta$, $\mathbb{M}(i,i+1) \leftarrow \beta$
  Fin Pour
Fin Fonction

Ensuite on écrit la fonction AssembleSM retournant, par exemple, le vecteur $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^d$ défini par

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} a \\ \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_{d-2} \\ b. \end{pmatrix} \tag{3.34}$$

Dans ce cas, le second membre du système linéaire de la question précédente peut être obtenu à partir de cette fonction. On peut toutefois noter que de nombreuses variantes peuvent être proposer.
La fonction AssembleSM s'écrit:

Algorithme 4 Fonction AssembleSM

Données : d : dimension du vecteur,
a, b : deux réels,
$\boldsymbol{\mu}$, : un vecteur de $\mathbb{R}^3$ tel que $\boldsymbol{\mu}(i) = \mu_i$,
Résultat : $\boldsymbol{B}$: vecteur de $\mathbb{R}^d$

```
1: Fonction B ← AssembleSM( d, a, b, μ )
2:    B ← 0_{d,1}
3:    B(1) ← a, B(d) ← b
4:    Pour i ← 2 à d − 1 faire
5:       B(i) ← μ(i − 1)
6:    Fin Pour
7: Fin Fonction
```

Un algorithme complet utilisant ces fonctions pourrait être

```
1: a ← 0, b ← 1, f : x ↦ 0, c : x ↦ 1 + x.^2
2: α ← 0, β ← 1
3: N ← 1000, h ← (b − a)/N, x ← a : h : b
4: A ← AssembleMat1D(N + 1, −1, 1, [−3, 4, 1], 2 + h ∗ h ∗ c(x(2 : N)))
5: F ← AssembleSM(N + 1, 2 ∗ α ∗ h, β, h ∗ h ∗ f(x(2 : N)))
6: V ← Solve(A, F)
```

Exercice 4 : exercice 2, partiel 2, 2019/2020

Soit l'E.D.P. suivante

$$-u''(x) + cu'(x) = f(x), \ \forall x \in]a; b[, \tag{4.35}$$
$$-u'(a) + 3u(a) = \alpha, \tag{4.36}$$
$$u(b) = \beta. \tag{4.37}$$

où c est un réel strictement positif.

Q. 1 a. *Que signifie l'abréviation E.D.P.?*

b. *Quelles sont les données du problème* (4.35)-(4.37)*? (préciser le type de chaque donnée : réel, entier, fonction, vecteur, ...)*

c. *Quelles sont les inconnues du problème* (4.35)-(4.37)*? (préciser le type)*

d. *Quelles sont les conditions initiales?*

e. *Quelles sont les conditions aux limites?*

□

R. 1 a. Equations aux Dérivées Partielles,

b. a et b deux réels, $a < b$, $c \in \mathbb{R}^{+*}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$ et $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$.

c. $u : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$.

d. aucune

e. (b) et (4.37)

Q. 2 a. *Expliciter la discrétisation régulière de* $[a; b]$ *avec* N *pas de discrétisation en espace.*

b. *Ecrire la fonction* DisReg *permettant de retourner cette discrétisation.*

□

R. 2 a. $(x_i)_{i=0}^{N}$ définis par $x_i = a + ih$ avec $h = (b - a)/N$.

Algorithme 5 Fonction DisReg : discrétisation régulière de $[a, b]$ avec $(N + 1)$ points

Données : a, b : deux réels, (a<b)
N : un entier non nul (nombre de pas de discrétisation).
Résultat : $\mathbf{X}$: vecteur de $\mathbb{R}^{N+1}$, $\mathbf{X}(i) = x_{i-1}$, $\forall i \in [\![1, N + 1]\!]$

b.
```
Fonction X ← DisReg( a, b, N )
  h ← (b − a)/N
  Pour i ← 1 à N + 1 faire
    X(i) ← a + (i − 1) * h
  Fin Pour
Fin Fonction
```

On note x_i, $i \in [\![0, N]\!]$ cette discrétisation. On souhaite résoudre l'E.D.P. (4.35)-(4.37) à l'aide des schémas numériques

$$\begin{aligned} -\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + c\frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} &= f_i, && (4.38)\\ (3 + 6h)u_0 - 4u_1 + u_2 &= 2h\alpha. && (4.39) \end{aligned}$$

Q. 3 *a. Expliquer en détail la façon d'obtenir le schéma* (4.38) *à partir de* (4.35) *et préciser ce que représentent les termes u_i, f_i, c et h?*

b. Expliquer en détail comment le schéma (4.39) *a été obtenu à partir de* (b).

c. Donner une discrétisation détaillée du problème (4.35) *à* (4.37) *en utilisant les schémas* (4.38) *et* (4.39).

d. Le schéma global est de quel ordre? Justifiez.

□

R. 3 a. Expliquer en détail la façon d'obtenir le schéma (4.38) à partir de (4.35) et préciser ce que représentent les termes u_i, f_i, c et h?

Soit $(x_i)_{i=0}^N$ la discrétisation régulière de $[a; b]$ avec N pas de discrétisation en espace. L'equation (4.35) entraine

$$-u''(x_i) + cu'(x_i) = f(x_i), \quad \forall i \in [\![1, N-1]\!]. \tag{4.40}$$

Pour obtenir une approximation à l'ordre 2 de $u'(x)$, on effectue deux développements de Taylor en $x + h$ et en $x - h$:

$$\begin{aligned} u(x+h) &= u(x) + h\,u^{(1)}(x) + \frac{h^2}{2}u^{(2)}(x) + \mathcal{O}(h^3),\\ u(x-h) &= u(x) - h\,u^{(1)}(x) + \frac{h^2}{2}u^{(2)}(x) + \mathcal{O}(h^3). \end{aligned}$$

On effectuant la différence entre ces deux équations on obtient:

$$u(x+h) - u(x-h) = 2h\,u^{(1)}(x) + \mathcal{O}(h^3)$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} u^{(1)}(x) &= \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} + \frac{1}{2h}\mathcal{O}(h^3)\\ &= \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \end{aligned}$$

Pour obtenir une approximation à l'ordre 2 de $u''(x)$, on effectue aussi deux développements de Taylor en $x + h$ et en $x - h$

$$\begin{aligned} u(x+h) &= u(x) + h\,u^{(1)}(x) + \frac{h^2}{2}u^{(2)}(x) + \frac{h^3}{3}u^{(3)}(x) + \mathcal{O}(h^4),\\ u(x-h) &= u(x) - h\,u^{(1)}(x) + \frac{h^2}{2}u^{(2)}(x) - \frac{h^3}{3}u^{(3)}(x) + \mathcal{O}(h^4). \end{aligned}$$

On effectuant la somme entre ces deux équations on obtient:

$$u(x+h)+u(x-h)=2u(x)+h^2\,u^{(2)}(x)+\mathcal{O}(h^4)$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} u^{(2)}(x) &= \frac{u(x+h)-2u(x)+u(x-h)}{h^2}+\frac{1}{h^2}\,\mathcal{O}(h^4) \\ &= \frac{u(x+h)-2u(x)+u(x-h)}{h^2}+\mathcal{O}(h^2) \end{aligned}$$

En remplaçant dans (4.40), on a de manière équivalente

$$-\frac{u(x_i+h)-2u(x)+u(x-h)}{h^2}+\mathcal{O}(h^2)+c\frac{u(x_i+h)-u(x_i-h)}{2h}+\mathcal{O}(h^2)=f(x_i).$$

En oubliant les $\mathcal{O}(h^2)$ dans l'équation précédente, on obtient une équation approchée, et en notant $u_i\approx u(x_i)$ on abouti à (4.38) avec $f_i=f(x_i)$.

b. Pour obtenir une approximation à l'ordre 2 de $u'(a)$, on effectue deux développements de Taylor en $a+h$ et en $a+2h$:

$$u(a+h)=u(a)+h\frac{du}{dx}(a)+\frac{h^2}{2!}\frac{d^2u}{dx^2}(a)+\mathcal{O}(h^3) \qquad (4.41)$$

et

$$u(a+2h)=u(a)+(2h)\frac{du}{dx}(a)+\frac{(2h)^2}{2!}\frac{d^2u}{dx^2}(A)+\mathcal{O}(h^3) \qquad (4.42)$$

L'objectif est d'obtenir, par une combinaison linéaire entre ces deux formules, une nouvelle équation ne comportant plus de termes en $\frac{d^2u}{da^2}$. En effectuant $4\times(4.41)-(4.42)$ on obtient

$$4u(a+h)-u(a+2h)=3u(a)+2h\frac{du}{dx}(a)+\mathcal{O}(h^3)$$

Comme $x_0=a$, $x_1=a+h$ et $x_2=a+2h$, on en déduit

$$\frac{du}{dx}(a)=\frac{-3u(x_0)+4u(x_1)-u(x_2)}{2h}+\mathcal{O}(h^2)$$

L'équation devient alors

$$-\frac{-3u(x_0)+4u(x_1)-u(x_2)}{2h}+\mathcal{O}(h^2)+3u(x_0)=\alpha$$

En oubliant le $\mathcal{O}(h^2)$ dans l'équation précédente, on obtient l'équation approchée

$$-\frac{-3u_0+4u_1-u_2}{2h}+3u_0=\alpha$$

qui s'écrit aussi

$$(3+6h)u_0-4u_1+u_2=2h\alpha.$$

c. On doit résoudre

$$
\begin{aligned}
(3+6h)u_0 - 4u_1 + u_2 &= 2h\alpha, && (4.43)\\
-\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + c\frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} &= f_i, \quad \forall i \in [\![1, N-1]\!] && (4.44)\\
u_N &= \beta. && (4.45)
\end{aligned}
$$

d. Le schéma global est d'ordre 2 car toutes les approximations des dérivées ont été effectuées avec une approximation en $\mathcal{O}(h^2)$.

On note $\boldsymbol{V}$ le vecteur de dimension $N+1$, de composantes $\boldsymbol{V}_i = u_{i-1}$, $\forall i \in [\![1, N+1]\!]$.

Q. 4 *Montrer que le vecteur* $\boldsymbol{V}$ *est solution du système linéaire*

$$\mathbb{A}\boldsymbol{V} = \boldsymbol{F} \tag{4.46}$$

en explicitant la matrice $\mathbb{A}$ *et le vecteur* $\boldsymbol{F}$ *(préciser les dimensions).* □

R. 4 Les (4.43)-(4.45) forment un système de $(N+1)$ équations linéaires à $(N+1)$ inconnues, les $(u_i)_{i=0}^{N}$: on peut donc l'écrire sous forme matricielle chacune des équations correspondant à une ligne du système. Pour alléger les écritures on note que (4.44) peut se récrire

$$\mu_+ u_{i+1} + 2u_i + \mu_- u_{i-1} = h^2 f(x_i)$$

avec $\mu_+ = -1 + ch^2$. et $\mu_+ = -(1+ch^2)$. Les équations discrétisées peuvent s'écrire avec $\gamma = 3 + 6h$

$$
\left\{
\begin{array}{lcll}
\gamma u_0 - 4u_1 + u_2 & = & 2h\alpha & \leftarrow \text{eq. en } x_0\\
\mu_+ u_2 + 2u_1 + \mu_- u_0 & = & h^2 f(x_1) & \leftarrow \text{eq. en } x_1\\
\mu_+ u_3 + 2u_2 + \mu_- u_1 & = & h^2 f(x_2) & \leftarrow \text{eq. en } x_2\\
 & \vdots & & \\
\mu_+ u_{N-1} + 2u_{N-2} + \mu_- u_{N-3} & = & h^2 f(x_{N-2}) & \leftarrow \text{eq. en } x_{N-2}\\
\mu_+ u_N + 2u_{N-1} + \mu_- u_{N-2} & = & h^2 f(x_{N-1}) & \leftarrow \text{eq. en } x_{N-1}\\
u_N & = & \beta & \leftarrow \text{eq. en } x_N
\end{array}
\right.
$$

Le système linéaire équivalent à (4.43)-(4.45) peut alors s'écrire sous la forme matricielle suivante où la i-ème ligne du système ($i \in [\![1, N+1]\!]$) correspond à l'équation en x_{i-1} :

$$
\mathbb{A}\boldsymbol{U} \stackrel{\text{def}}{=}
\left(\begin{array}{c|cccccc|c}
\gamma & -4 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0\\
\hline
\mu_+ & 2 & \mu_- & 0 & \dots & \dots & 0 & 0\\
0 & \mu_+ & 2 & \mu_- & 0 & \dots & 0 & 0\\
0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots\\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots\\
\vdots & 0 & \dots & 0 & \mu_+ & 2 & \mu_- & 0\\
0 & 0 & \dots & \dots & 0 & \mu_+ & 2 & \mu_-\\
\hline
0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1
\end{array}\right)
\left(\begin{array}{c}
u_0\\
\hline
u_1\\
u_2\\
\vdots\\
\vdots\\
u_{N-2}\\
u_{N-1}\\
\hline
u_N
\end{array}\right)
=
\left(\begin{array}{c}
2h\alpha\\
\hline
h^2 f(x_1)\\
h^2 f(x_2)\\
\vdots\\
\vdots\\
h^2 f(x_{N-2})\\
h^2 f(x_{N-1})\\
\hline
\beta
\end{array}\right)
\stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{B} \tag{4.47}
$$

Q. 5 *Ecrire la fonction* Assemble *retournant la matrice* $\mathbb{M} \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ *définie par*

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ r & s & w & 0 & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & r & s & w \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \nu_3 & \nu_2 & \nu_1 \end{pmatrix} \tag{4.48}$$

où s, r, w, μ_1, μ_2, μ_3, ν_1, ν_2 *et* ν_3 *sont des réels donnés.* □

R. 5 Voici une version possible:

Algorithme 6 Fonction Assemble

Données :
- d : dimension de la matrice,
- $\boldsymbol{\mu}$, : un vecteur de $\mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{\mu}(i) = \mu_i$, $\forall i \in [\![1, 3]\!]$,
- $\boldsymbol{\nu}$, : un vecteur de $\mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{\nu}(i) = \nu_i$, $\forall i \in [\![1, 3]\!]$,
- r, s, w : trois réels

Résultat : $\mathbb{M}$: matrice $d \times d$

```
Fonction M ← Assemble( d, μ, ν, r, s, w )
  M ← 0_{d,d}
  k ← d
  Pour i = 1 à 3 faire
    M(1, i) ← μ(i),
    M(d, k) ← ν(i),
    k ← k − 1
  Fin Pour
  Pour i = 2 à d − 1 faire                         ▷ Initialisation de la ligne i
    M(i, i) ← s, M(i, i − 1) ← r, M(i, i + 1) ← w
  Fin Pour
Fin Fonction
```

Q. 6 *Ecrire un algorithme complet de résolution du problème* (4.35) *à* (4.37) *basé sur* (4.46)*. (Utiliser au maximum les fonctions). On pourra utiliser la fonction* $\boldsymbol{X} \leftarrow$ Solve$(\mathbb{A}, \boldsymbol{B})$ *retournant la solution du système linéaire* $\mathbb{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$. □

R. 6 Un algorithme complet peut se présenter sous la forme:

$a \leftarrow 0,\ b \leftarrow 2 * \pi,\ c \leftarrow 1$
$f \leftarrow \big(x \mapsto 5x^2\cos(x^2) + 2\sin(x^2)\big)$
$alpha \leftarrow -2,\ beta \leftarrow 2,$ ▷ C.L.
$\boldsymbol{x} \leftarrow \mathrm{DisReg}(a, b, 500)$
$h \leftarrow (b - a)/N$
$\mathbb{A} \leftarrow \mathrm{AssembleMat1D}\left(N + 1, \begin{pmatrix} 3 + 6h \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, -1 + c * h * h, 2, -1 - c * h * h\right)$
$\boldsymbol{F} \leftarrow h * h * f(\boldsymbol{x})$ ▷ vectorisé
$\boldsymbol{F}(1) \leftarrow 2 * h * alpha$
$\boldsymbol{F}(N + 1) \leftarrow beta$
$\boldsymbol{U} \leftarrow \mathrm{Solve}(\mathbb{A}, \boldsymbol{F})$
