Méthodes Numériques II
Chapitre 4: Equations aux Dérivées Partielles
Exercices - épisode 2 version du 2025/03/07 à 05:30:55

Exercice 1 : exercice 2, partiel 2, 2017/2018

Soient α, β, D trois réels, $D > 0$, et f une fonction définie sur $[a; b]$ à valeurs réelles. On souhaite résoudre numériquement le problème suivant

$$-Du''(x) + u(x) = f(x), \ \forall x \in]a; b[, \tag{1.1}$$
$$u(a) = \alpha. \tag{1.2}$$
$$3u(b) + u'(b) = \beta, \tag{1.3}$$

Q. 1 a. *Quelles sont les données du problème* (1.1) *à* (1.3)*? (préciser le type de chaque donnée : réel, entier, fonction, vecteur, ...)*

b. *Quelles sont les inconnues du problème* (1.1) *à* (1.3)*? (préciser le type)*

c. *Quelles sont les conditions initiales?*

d. *Quelles sont les conditions aux limites?*

□

Q. 2 a. *Expliquer ce qu'est une discrétisation régulière de l'intervalle* $[a; b]$ *avec* N *pas de discrétisation en espace.*

b. *Ecrire la fonction (algorithmique ou Matlab)* DisReg *permettant d'obtenir cette discrétisation.*

□

On note x_i, $i \in [\![0, N]\!]$ cette discrétisation. On souhaite résoudre (1.1) à l'aide du schéma numérique

$$-D\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2} + u_i = f_i. \tag{1.4}$$

Q. 3 a. *Expliquer comment le schéma* (1.4) *a été obtenu à partir de* (1.1) *et préciser ce que représentent les termes* u_i, f_i *et* Δx*?*

b. *Donner l'ensemble* $\mathcal{E}$ *des valeurs que peut prendre* i *dans le schéma* (1.4).

c. *Construire une discrétisation des conditions aux limites d'ordre 2 au moins.*

d. *Le schéma global est de quel ordre? Justifiez.*

□

On note $\boldsymbol{V}$ le vecteur de dimension $N + 1$, de composantes $\boldsymbol{V}_i = u_{i-1}$, $\forall i \in [\![1, N + 1]\!]$.

Q. 4 *Montrer que le vecteur* $\boldsymbol{V}$ *est solution du système linéaire*

$$\mathbb{A}\boldsymbol{V} = \boldsymbol{F} \tag{1.5}$$

en explicitant la matrice $\mathbb{A}$ *et le vecteur* $\boldsymbol{F}$ *(préciser les dimensions).* □

Q. 5 *Ecrire la fonction (algorithmique ou Matlab)* AssembleMat *retournant une matrice* $\mathbb{M} \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ *définie par*

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{pmatrix} \tag{1.6}$$

où pour tout $j \in [\![1, 3]\!]$, α_j, β_j, μ_j *sont des réels donnés.* □

Q. 6 *On suppose les données du problème* (1.1) *à* (1.3) *fournies et la fonction RSL permettant la résolution du système linéaire* $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ *déjà implémentée :* $\boldsymbol{x} \leftarrow \mathrm{RSL}(\mathbb{A}, \boldsymbol{b})$. *Ecrire un algorithme complet de résolution du problème* (1.1) *à* (1.3) *basé sur (1.5). (Utiliser au maximum les fonctions)* □

Exercice 2

Soit $\left\{ \begin{array}{lcccl} u & : & \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (t, x) & \longmapsto & u(t, x) \end{array} \right.$ une fonction suffisament régulière. Voici deux exemples de formules de Taylor à l'ordre 3

$$\begin{aligned} u(t, x+h) &= u(t, x) + h\frac{\partial u}{\partial x}(t, x) + \frac{h^2}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) + \mathcal{O}(h^3) \\ u(t+h, x) &= u(t, x) + h\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + \frac{h^2}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) + \mathcal{O}(h^3) \end{aligned}$$

Q. 1 *En écrivant des formules de Taylor à l'ordre 2, montrer que*

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) &= \frac{u(t, x+h) - u(t, x)}{h} + \mathcal{O}(h) \\ \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) &= \frac{u(t, x) - u(t, x-h)}{h} + \mathcal{O}(h) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) &= \frac{u(t+h, x) - u(t, x)}{h} + \mathcal{O}(h) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) &= \frac{u(t, x) - u(t-h, x)}{h} + \mathcal{O}(h) \end{aligned}$$

□

Q. 2 *En utilisant deux formules de Taylor à l'ordre* 3*, montrer que*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t,x) = \frac{u(t,x+h)-u(t,x-h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2)$$

□

Q. 3 *En utilisant des formules de Taylor à l'ordre* 3*, montrer que*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x}(t,x) &= \frac{-3u(t,x)+4u(t,x+h)-u(t,x+2h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2)\\
\frac{\partial u}{\partial x}(t,x) &= \frac{3u(t,x)-4u(t,x-h)+u(t,x-2h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2)
\end{aligned}$$

□

Q. 4 *En utilisant deux formules de Taylor à l'ordre* 4*, montrer que*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = \frac{u(t,x+h)-2u(t,x)+u(t,x-h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2) \tag{2.7}$$

□

Exercice 3 : exercice 2, partiel 2, 2016/2017

On souhaite résoudre numériquement l'E.D.P. suivante

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) - \alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) + \beta\frac{\partial u}{\partial x}(t,x) &= f(t,x),\ \forall (t,x) \in]0;T]\times]a;b[, && (3.8)\\
u(0,x) &= g_0(x),\ \forall x \in [a;b], && (3.9)\\
u(t,a) &= g_a(t),\ \forall t \in [0;T], && (3.10)\\
u(t,b) &= g_b(t),\ \forall t \in]0;T]. && (3.11)
\end{aligned}$$

avec α, β deux réels, $\alpha > 0$, $T > 0$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$.

Q. 1 a. *Que signifie l'abréviation E.D.P.?*

b. *Quelles sont les données du problème* (3.8) *à* (3.11)*? (préciser le type de chaque donnée : réel, entier, fonction, vecteur, ...)*

c. *Quelles sont les inconnues du problème* (3.8) *à* (3.11)*? (préciser le type)*

d. *Quelles sont les conditions initiales?*

e. *Quelles sont les conditions aux limites?*

f. *Ecrire la(les) condition(s) de compatibilité.*

□

On note t^n, $n \in [\![0, N_t]\!]$ et x_i, $i \in [\![0, N_x]\!]$ les discrétisations régulières des intervalles $[0;T]$ et $[a;b]$ avec N_t pas de discrétisation en temps et N_x pas de discrétisation en espace.

Q. 2 *Donner explicitement les formules permettant de calculer l'ensemble des* t^n *et des* x_i. □

On souhaite résoudre l'E.D.P. à l'aide du schéma numérique

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} - \alpha \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} + \beta \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x} = f_i^n. \tag{3.12}$$

Q. 3 *a. Expliquer comment le schéma* (3.12) *a été obtenu à partir de* (3.8) *et préciser ce que représentent les valeurs* u_i^n, f_i^n, Δt *et* Δx.

b. Donner une discrétisation (détaillée) du problème (3.8) *à* (3.11) *en utilisant le schéma* (3.12).

c. Le schéma est-il explicite ou implicite?

d. Le schéma est de quel ordre en temps? en espace?

e. Expliquer comment améliorer l'ordre en espace du schéma (3.12).

□

On note $\boldsymbol{U}^n$ les vecteurs de dimension $N_x + 1$, de composantes $\boldsymbol{U}_i^n = u_{i-1}^n$, $\forall i \in [\![1, N_x + 1]\!]$.

Q. 4 *a. Comment initialiser le vecteur* $\boldsymbol{U}^0$ *?*

b. En supposant le vecteur $\boldsymbol{U}^n$ *déjà calculé, décrire le calcul du vecteur* $\boldsymbol{U}^{n+1}$.

□

Q. 5 *On suppose les données du problème* (3.8) *à* (3.11) *fournies. Ecrire un algorithme complet de résolution du problème* (3.8) *à* (3.11) *en utilisant le schéma* (3.12). □