Energétique 1ère année
Sup'Galilée

Méthodes Numériques
Année 2023-2024

EXAMEN DU 29 AOÛT 2024

durée : 2h30.

Sans documents, sans appareils électroniques, ...

Le barême est donné à titre indicatif.
Les entrées/sorties des fonctions devront être décrites.

EXERCICE 1 : E.D.O. (10 points)

0.25 PTS **Q. 1** ***a.*** *Que signifie l'abréviation E.D.O.?*

0.5 PTS ***b.*** *Donner la définition détaillée d'un problème de Cauchy* ***vectoriel****.*

0.25 PTS ***c.*** *Quelles sont les données d'un problème de Cauchy* ***vectoriel****?*

0.25 PTS ***d.*** *Que cherche-t'on?*

Q.1 1.25 PTS

0.5 PTS **Q. 2 [Algo.]** *Ecrire une fonction algorithmique* `DisReg` *permettant d'obtenir une discrétisation régulière de l'intervalle* $[a, b]$*, avec* $a < b$*, en* $(N + 1)$ *points.*

Q.2 0.50 PTS

On souhaite résoudre numériquement un problème de Cauchy par un schéma explicite à un pas (constant) du type

$$\boldsymbol{y}^{[n+1]} = \boldsymbol{y}^{[n]} + h\boldsymbol{\Phi}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]}, h). \tag{1.1}$$

La fonction $\boldsymbol{\Phi}$ associée à une méthode de Runge-Kutta à q évaluations de $\boldsymbol{f}$ (fonction associée au problème de Cauchy) peut s'écrire sous la forme :

$$\boldsymbol{\Phi}(t, \boldsymbol{y}, h) = \sum_{i=1}^{q} c_i \boldsymbol{k}^{[i]}(t, \boldsymbol{y}, h)$$

avec

$$\boldsymbol{k}^{[i]}(t, \boldsymbol{y}, h) = \boldsymbol{f}\left(t + ha_i, y + h\sum_{j=1}^{q} b_{i,j}\boldsymbol{k}^{[j]}(t, \boldsymbol{y}, h)\right), \ 1 \leqslant i \leqslant q$$

que l'on peut représenter sous la forme d'un tableau dit **tableau de Butcher** :

$$\begin{array}{c|c} \boldsymbol{a} & \mathbb{B} \\ \hline & \boldsymbol{c}^t \end{array} \tag{1.2}$$

avec $\mathbb{B} = (b_{i,j})_{i,j \in [\![1,q]\!]} \in \mathcal{M}_{q,q}(\mathbb{R})$, $\boldsymbol{a} = (a_i)_{i \in [\![1,q]\!]} \in \mathbb{R}^q$ et $\boldsymbol{c} = (c_i)_{i \in [\![1,q]\!]} \in \mathbb{R}^q$.
On prend pour tableau de Butcher:

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{5} & \frac{3}{5} & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{7}{3} & \frac{10}{3} & 0 \\ \hline & \frac{2}{9} & \frac{25}{36} & \frac{1}{12} \end{array} \tag{1.3}$$

1.5 PTS **Q. 3** *Ecrire explicitement et en détail le schéma de Runge-Kutta associé au tableau de Butcher (1.3). On admettra que ce schéma est d'ordre* 3.

Q.3 1.50 PTS

Un autre schéma de Runge-Kutta d'ordre 3 pour la résolution d'un problème de Cauchy vectoriel est donné par

$$\left\{\begin{array}{lcl} \boldsymbol{y}^{[n+1]} & = & \boldsymbol{y}^{[n]} - \frac{1}{18}h(3\boldsymbol{k}_1 - 16\boldsymbol{k}_2 - 5\boldsymbol{k}_3) \\ \text{avec} & & \boldsymbol{k}_1 = \boldsymbol{f}\left(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]}\right), \\ & & \boldsymbol{k}_2 = \boldsymbol{f}\left(\frac{1}{4}h + t^n, \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{1}{4}h\boldsymbol{k}_1\right), \\ & & \boldsymbol{k}_3 = \boldsymbol{f}\left(h + t^n, \boldsymbol{y}^{[n]} - \frac{1}{5}h(7\boldsymbol{k}_1 - 12\boldsymbol{k}_2)\right), \\ \boldsymbol{y}^{[0]} & & \text{donné.} \end{array}\right. \tag{1.4}$$

1.5 PTS **Q. 4 [Algo.]** *Ecrire la fonction algorithmique* RedRK3 *permettant de résoudre un problème de Cauchy vectoriel par le schéma* (1.4). □ Q.4 1.50 PTS

Pour résoudre numériquement un problème de Cauchy, différentes méthodes peuvent être utilisées. Dans le reste de l'exercice, nous allons nous focaliser sur les méthodes dites de **Prédiction-Correction**. Soient les deux schémas suivants d'ordre 3:

$$\boldsymbol{y}^{[n+1]} = \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{h}{12}\left(5\boldsymbol{f}(t^{n+1}, \boldsymbol{y}^{[n+1]}) + 8\boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]}) - \boldsymbol{f}(t^{n-1}, \boldsymbol{y}^{[n-1]})\right). \tag{1.5}$$

$$\boldsymbol{y}^{[n+1]} = \boldsymbol{y}^{[n-1]} + \frac{h}{3}\left(7\boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]}) - 2\boldsymbol{f}(t^{n-1}, \boldsymbol{y}^{[n-1]}) + \boldsymbol{f}(t^{n-2}, \boldsymbol{y}^{[n-2]})\right) \tag{1.6}$$

1.5 PTS **Q. 5** *Expliquez en détail comment résoudre un problème de Cauchy vectoriel par un schéma de type* ***Prédiction-Correction*** *utilisant les deux schémas* (1.6) *et* (1.5). *Un soin particulier sera apporté à l'«initialisation».* □ Q.5 1.50 PTS

1.5 PTS **Q. 6 [Algo.]** *Ecrire la fonction algorithmique* RedPC3 *permettant de résoudre un problème de Cauchy (vectoriel) par les schémas* (1.6) *et* (1.5). □ Q.6 1.50 PTS

Application: Soit le système d'E.D.O. suivant

$$\forall t \in [0, 2\pi], \quad \left\{\begin{array}{ll} \dddot{\theta}_1(t) + 2(\ddot{\theta}_2(t) - \ddot{\theta}_1(t)) - 4\dot{\theta}_2(t) + \theta_1(t) & = 2\sin(t), \qquad (1.7a) \\ \dddot{\theta}_2(t) - 3(\ddot{\theta}_1(t) - \ddot{\theta}_2(t)) + 3\dot{\theta}_1(t) - \theta_2(t) & = \cos(t) \qquad (1.7b) \end{array}\right.$$

On veut résoudre ce système d'E.D.O. avec pour données initiales $\theta_1(0) = 1$, $\dot{\theta}_1(0) = 0$, $\ddot{\theta}_1(0) = 2$, $\theta_2(0) = -1$, $\dot{\theta}_2(0) = 1/2$, $\ddot{\theta}_2(0) = 3$.

1.5 PTS **Q. 7** *Ecrire le problème précédent sous la forme d'un problème de Cauchy.* □ Q.7 1.50 PTS

1 PTS **Q. 8 [Algo.]** *Ecrire un algorithme complet permettant de résoudre* (1.7a)-(1.7b) *avec les données initiales spécifiées. Ce programme devra aussi représenter les approximations des fonctions* x_1 *et* x_2. *On utilisera pour celà la fonction* Plot(X, Y) *qui relie les points* $(X(i), Y(i))$ *contenus dans les deux tableaux de même taille* X *et* Y *(fonction similaire à la fonction* `plot` *de Matlab).* □ Q.8 1.00 PTS

Exo. 1 10.25 PTS

Exercice 2 : E.D.P. (10 points)

Soit l'E.D.P. suivante

$$\begin{aligned} -u''(x) + \nu(x)u(x) &= g(x), \ \forall x \in]a; b[, & (2.1) \\ u(a) &= \alpha, & (2.2) \\ u'(b) + 3u(b) &= \beta. & (2.3) \end{aligned}$$

où $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$, $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et ν est une fonction strictement positive.

0.25 PTS **Q. 1** **a.** *Que signifie l'abréviation E.D.P.?*

0.5 PTS **b.** *Quelles sont les données du problème (2.1)-(2.3)? (préciser le type de chaque donnée : réel, entier, fonction, vecteur, ...)*

0.25 PTS **c.** *Quelles sont les inconnues du problème (2.1)-(2.3)? (préciser le type)*

0.25 PTS **d.** *Quelles sont les conditions initiales?*

0.25 PTS **e.** *Quelles sont les conditions aux limites?*

□ Q.1 1.50 PTS

On note x_i, $i \in [\![0, N]\!]$ la discrétisation régulière de $[a; b]$ avec N pas de discrétisation. On souhaite résoudre l'E.D.P. (2.1) à (2.3) à l'aide des schémas numériques

$$
\begin{aligned}
-u_{i+1} + (2 + h^2\nu_i)u_i - u_{i-1} &= h^2 g_i, && (2.4)\\
(1 + 3h)u_N - u_{N-1} &= h\beta. && (2.5)
\end{aligned}
$$

1.5 PTS **Q. 2** **a.** *Expliquer en détail comment le schéma (2.4) a été obtenu à partir de (2.1) et préciser ce que représentent les termes u_i, g_i, ν_i et h?*

1.5 PTS **b.** *Expliquer en détail comment le schéma (2.5) a été obtenu à partir de (2.3).*

0.25 PTS **c.** *Donner une discrétisation détaillée du problème (2.1) à (2.3) en utilisant entre autres les schémas (2.4) et (2.5).*

0.25 PTS **d.** *Le schéma global est de quel ordre? Justifiez.*

□ Q.2 3.50 PTS

On note $\boldsymbol{V}$ le vecteur de dimension $N+1$, de composantes $\boldsymbol{V}_i = u_{i-1}$, $\forall i \in [\![1, N+1]\!]$.

Q. 3 *Montrer que le vecteur $\boldsymbol{V}$ est solution du système linéaire*

$$\mathbb{A}\boldsymbol{V} = \boldsymbol{F} \tag{2.6}$$

2.0 PTS *en explicitant la matrice $\mathbb{A}$ et le vecteur $\boldsymbol{F}$ (préciser les dimensions).* □ Q.3 2.00 PTS

Q. 4 *[Algorithmique] Ecrire la fonction* Assemble *retournant la matrice $\mathbb{M} \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ définie par*

$$
\mathbb{M} = \begin{pmatrix}
\mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & 0 & \dots & \dots & 0\\
r_1 & s_1 & t_1 & 0 & & & \vdots\\
0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots\\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\
\vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\
\vdots & & & \ddots & r_{d-2} & s_{d-2} & t_{d-2}\\
0 & \dots & \dots & 0 & \nu_1 & \nu_2 & \nu_3
\end{pmatrix} \tag{2.7}
$$

1.0 PTS *où r_i, s_i, t_i, μ_1, μ_2, μ_3, ν_1, ν_2 et ν_3 sont des réels donnés.* □ Q.4 1.00 PTS

Q. 5 *[Algorithmique] Ecrire la fonction algorithmique* resEDP *permettant de résoudre le problème (2.1) à (2.3) en utilisant les schémas (2.4) et (2.5). Cette fonction devra retourner la discrétisation $(x_i)_{i=0}^N$ de*
1.5 PTS *l'intervalle $[a, b]$ avec N pas de discrétisation et l'ensemble des $(u_i)_{i=0}^N$.* □ Q.5 1.50 PTS

Q. 6 *[Algorithmique] Ecrire un algorithme complet de résolution du problème (2.1) à (2.3) utilisant la fonction* resEDP *dont les données seront choisies pour avoir comme solution exacte $u(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sin(x^2)$. On représentera l'erreur commise entre la solution exacte et la solution numérique calculée. Pour celà, on utilisera la fonction* Plot*(X, Y) qui relie les points $(X(i), Y(i))$ contenus dans les deux tableaux de même*
1.0 PTS *taille X et Y (function similaire à la fonction* `plot` *de Matlab).* □ Q.6 1.00 PTS

Exo. 2 10.50 PTS