Ecole d'ingénieurs Sup Galilée
Energétique - Informatique - Instrumentation
Mathématiques Appliquées et Calcul Scientifique
Télécommunications et Réseaux

Université Sorbonne Paris Nord

Méthodes Numériques (G3SEMN)*

Sup'Galilée, Ingénieurs Energétique, 1ère année

François Cuvelier

Laboratoire d'Analyse Géométrie et Applications
Institut Galilée
Université Paris XIII.

2026/02/10

*Compilé le 2026/02/10 à 06:42:27

Plan du cours

Plan

Réaction BZ (Belousov-Zhabotinsky)

(a) *Boris Pavlovich Belousov* 1893-1970, Chimiste et biophysicien russe

(b) *Anatol Zhabotinsky* 1938-2008, Chimiste russe

(c) *Ilya Prigogine* 1917-2003, Physicien et chimiste belge (origine russe). Prix Nobel de chimie en 1977

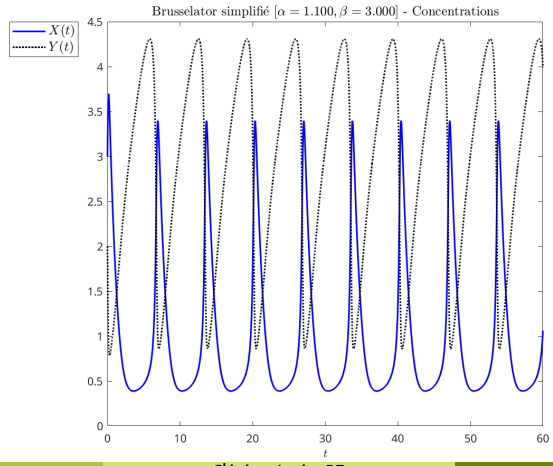
Modèle du Brusselator (1970)

Une solution de bromate de potassium et d'acide sulfurique mélangée à une solution d'acide manolique et de bromure de sodium peut entrainer, sous certaines conditions, une oscillation de la couleur de la solution mélange du rouge au bleue avec une période de 7 secondes.
Le modéle associé est nommé **modèle du brusselator**. Sous certaines hypothèses, le modèle simplifié peut s'écrire :

$$\begin{cases} X'(t) &= 1 + \alpha X^2(t)Y(t) - (\beta+1)X(t) \\ Y'(t) &= -\alpha X^2(t)Y(t) + \beta X(t) \end{cases} \quad (1)$$

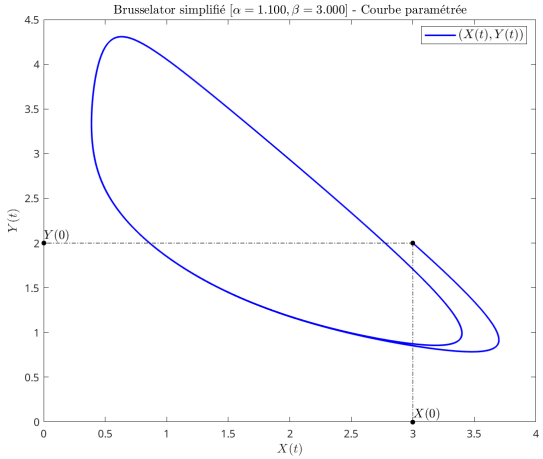
Modèle du Brusselator

Avec $\alpha = 1.1$, $\beta = 3$ et les C.I. $X(0) = 3$ et $Y(0) = 2$:



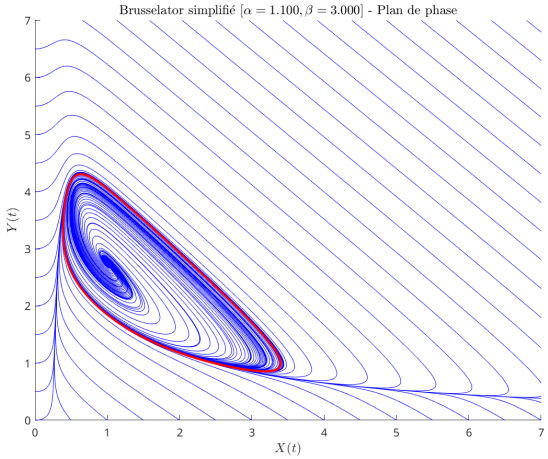
Modèle du Bruxelator

Avec $\alpha = 1.1$, $\beta = 3$ et les C.I. $X(0) = 3$ et $Y(0) = 2$:



Modèle du Brusselator

Avec $\alpha = 1$, $\beta = 3$ et les C.I. $X(0) = 3$ et $Y(0) = 2$:



Modèle de Lorentz

(a) *Edward Norton Lorenz*
1917-2008, Mathématicien et météorologiste américain

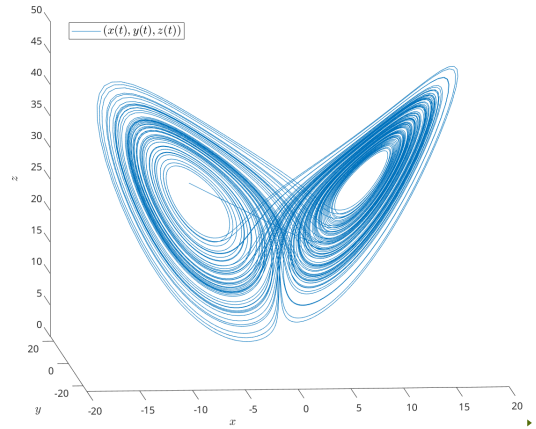
Le couplage Océan-Atmosphère est décrit par un système d'E.D.P. couplées de Navier-Stokes de la mécanique des fluides.
Le **modèle de Lorentz** est une version très simplifiée de ces équations pour l'étude du phénomène de convection de Rayleigh-Bénard :

$$\begin{cases} x'(t) &= -\sigma x(t) + \sigma y(t) \\ y'(t) &= -x(t)y(t) + \rho x(t) - y(t) \\ z'(t) &= x(t)y(t) - \beta z(t) \end{cases}$$

- $x(t)$: proportionnel à l'intensité du mouvement de convection,
- $y(t)$: proportionnel à la différence de température entre les courants ascendants et descendants,
- $z(t)$:proportionnel à une variation de température

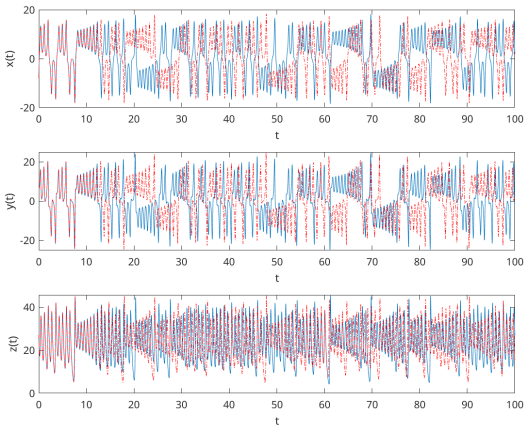
Modèle de Lorentz : papillon

En représentant la courbe paramétrée $(x(t), y(t), z(t))$ dans l'espace, on obtient l'*attracteur étrange de Lorenz* en forme d'aile de papillon



Modèle de Lorentz

Avec $\sigma = 10$, $\rho = 28$, $\beta = 8/3$ et les données initiales $x(0) = -8, y(0) = 8, z(0) = 27$ (courbe bleue) et des données initiales *perturbées* $x(0) = -8 + 1e-4, y(0) = 8, z(0) = 27$ (courbe rouge pointillée)

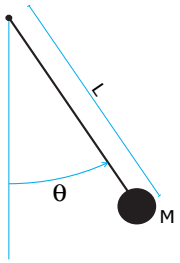


Pendule pesant sans viscosité

Le pendule pesant : objet pesant accroché à une tige de masse négligeable, l'autre extrémité de la tige est l'axe de rotation du pendule.

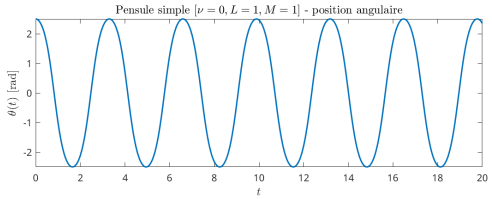
$$\theta''(t) + \frac{g}{L}\sin(\theta(t)) = 0. \tag{2}$$

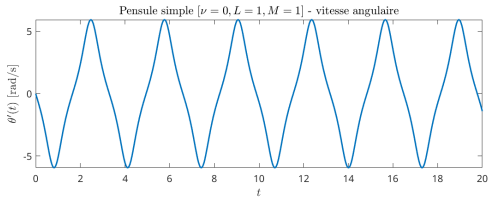
où $\theta(t)$ est l'angle que fait, à l'instant t, le pendule par rapport à l'axe vertical, L la longueur de la tige.

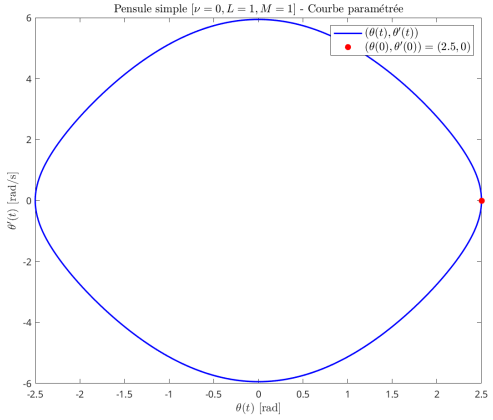


Pendule pesant sans viscosité

Avec $\frac{g}{L} = 3$ et les C.I. $\theta_0 = \frac{5\pi}{6}$, $\theta'_0 = 0$:

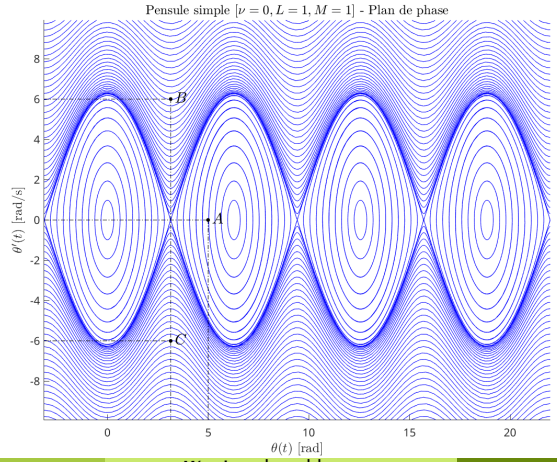






Pendule pesant sans viscosité

Avec $\frac{g}{L} = 3$ et les C.I. $\theta_0 = \frac{5\pi}{6}$, $\theta'_0 = 0$:



Plan

Soit $\boldsymbol{y} : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ de classe $\mathcal{C}^p$ (continûment dérivable d'ordre p).
On note $\boldsymbol{y}^{(k)}$ la dérivée d'ordre k de $\boldsymbol{y}$.

Définition 2.1

On appelle **équation différentielle ordinaire (E.D.O.) d'ordre** p une équation de la forme :

$$\mathcal{F}(t, \boldsymbol{y}(t), \boldsymbol{y}^{(1)}(t), \boldsymbol{y}^{(2)}(t), \ldots, \boldsymbol{y}^{(p)}(t)) = 0.$$

Définition 2.2

On appelle **forme canonique d'une E.D.O.** une expression du type :

$$\boldsymbol{y}^{(p)}(t) = \boldsymbol{\mathcal{G}}(t, \boldsymbol{y}(t), \boldsymbol{y}^{(1)}(t), \boldsymbol{y}^{(2)}(t), \ldots, \boldsymbol{y}^{(p-1)}(t)). \quad (3)$$

Proposition 2.1

Toute équation différentielle d'ordre p sous forme canonique peut s'écrire comme un système de p équations différentielles d'ordre 1.

Plan

Définition 3.1 : *problème de Cauchy*

Soit $\boldsymbol{f}$ l'application continue donnée par

$$\begin{array}{rccc} \boldsymbol{f} & : & [t^0, t^0+T]\times\mathbb{R}^m & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ & & (t,\boldsymbol{y}) & \longmapsto & \boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{y}) \end{array}$$

avec $T \in]0,+\infty[$. Le **problème de Cauchy** consiste à déterminer une fonction $\boldsymbol{y}$ définie par

$$\begin{array}{rccc} \boldsymbol{y} & : & [t^0, t^0+T] & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ & & t & \longmapsto & \boldsymbol{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_m(t) \end{pmatrix} \end{array}$$

continue et dérivable, telle que

$$\boldsymbol{y}'(t) = \boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{y}(t)), \quad \forall t \in [t^0, t^0+T] \tag{4}$$
$$\boldsymbol{y}(t^0) = \boldsymbol{y}^{[0]} \in \mathbb{R}^m. \tag{5}$$

$$(\mathcal{C}) \quad \begin{cases} \boldsymbol{y}'(t) = \boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{y}(t)), & \forall t \in [t^0, t^0+T] \\ \boldsymbol{y}(t^0) = \boldsymbol{y}^{[0]} \in \mathbb{R}^m. \end{cases}$$

Exercice

Quelles sont les données du problème de Cauchy?

$$(\mathcal{C}) \quad \begin{cases} \boldsymbol{y}'(t) = \boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{y}(t)), & \forall t \in [t^0, t^0+T] \\ \boldsymbol{y}(t^0) = \boldsymbol{y}^{[0]} \in \mathbb{R}^m. \end{cases}$$

Exercice

Quelles sont les données du problème de Cauchy?

- $t^0 \in \mathbb{R}$, $T \in \mathbb{R}^{+*}$, $m \in \mathbb{N}^*$
- la fonction $\boldsymbol{f}$
- le vecteur $\boldsymbol{y}^{[0]} \in \mathbb{R}^m$

TD

Exercice

Pour chacune des E.D.O. suivantes écrire le problème de Cauchy associé

$$(a)\ \begin{cases} x''(t)+\alpha x'(t)+\beta\cos(x(t))=\sin(t),\ t\in]0,2\pi] \\ x(0)=0,\ x'(0)=1. \end{cases}$$

$$(b)\ \begin{cases} LCv''(t)+\left(\frac{L}{R_2}+R_1C\right)v'(t)+\left(\frac{R_1}{R_2}+1\right)v(t)=e,\ t\in]0,100] \\ v(0)=0,\ v'(0)=0. \end{cases}$$

$$(c)\ \begin{cases} x''(t)=\mu(1-x^2(t))x'(t)-x(t),\ t\in]0,10] \\ x(0)=1,\ x'(0)=-1. \end{cases}$$

$$(d)\ \begin{cases} y^{(3)}(t)-\cos(t)y^{(2)}(t)+2\sin(t)y^{(1)}(t)-y(t)=0,\ t\in]0,T] \\ y(0)=u_0,\ y^{(1)}(0)=v_0,\ y^{(2)}(0)=w_0. \end{cases}$$

$$(e)\ \begin{cases} \forall t\in]0,T], & x_1''(t)-2x_2'(t)+3x_1'(t)+4x_1(t)x_2(t)=\sin(t), \\ & x_2''(t)+3x_1'(t)-2x_2'(t)-3x_1(t)x_2(t)=\cos(t), \\ & x_1(0)=0,\ x_1'(0)=-1,\ x_2(0)=1,\ x_2'(0)=-2. \end{cases}$$

Exercice

Déterminer le problème de Cauchy associé au modèle du Brusselator simplifié :

$$(\mathcal{B})\ \begin{cases} X'(t) &= 1+\alpha X^2(t)Y(t)-(\beta+1)X(t) \\ Y'(t) &= -\alpha X^2(t)Y(t)+\beta X(t) \end{cases}$$

avec C.I. $X(0)=X_0$ et $Y(0)=Y_0$.

Exercice

Déterminer le problème de Cauchy associé au modèle du pendule pesant simplifié :

$$(\mathcal{P})\quad \theta^{(2)}(t)+\frac{g}{L}\sin(\theta(t))=0.$$

avec C.I. $\theta(0)=\theta_0$ et $\theta'(0)=\theta_0'$.

- Problème de Cauchy **linéaire** :

$$\begin{cases} y'(t) &= 3y(t)-3t,\ \text{ si }\ t>0 \\ y(0) &= 1 \end{cases}$$

On a $f(t,v)=3v-3t$ et une solution $y(t)=(1-1/3)e^{3t}+t+1/3$.

- Problème de Cauchy **non-linéaire** :

$$\begin{cases} y'(t) &= \sqrt[3]{y(t)},\ \text{ si }\ t>0 \\ y(0) &= 0 \end{cases}$$

On a $f(t,v)=\sqrt[3]{v}$ et **trois solutions** $y(t)=0$, $y(t)=\sqrt{8t^3/27}$ et $y(t)=-\sqrt{8t^3/27}$.

$$(\mathcal{PC})\quad \begin{cases} \boldsymbol{y}'(t) &= \boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{y}(t)) \\ \boldsymbol{y}(t^0) &= \boldsymbol{y}_0\in\mathbb{R}^m. \end{cases}$$

avec $\boldsymbol{f}: U\longrightarrow\mathbb{R}^m$, U un ouvert de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^m$ et $(t^0,\boldsymbol{y}^{[0]})\in U$.

Théorème 3.1 : *Cauchy-Lipschitz*

On suppose que la fonction $\boldsymbol{f}$ est continue sur U et quelle est localement lipschitzienne en $\boldsymbol{y}$: $\forall(t,\boldsymbol{y})\in U$, $\exists\mathcal{W}$ voisinage $\boldsymbol{t}$, $\exists\mathcal{V}$ voisinage $\boldsymbol{y}$, $\exists L>0$ tels que

$$\forall s\in\mathcal{W},\ \forall(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\in\mathcal{V}^2,\quad \|\boldsymbol{f}(s,\boldsymbol{u})-\boldsymbol{f}(s,\boldsymbol{v})\|\leqslant L\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\| \tag{6}$$

Sous ces hypothèses le problème de Cauchy $(\mathcal{PC})$ admet une unique solution.

Proposition 3.1

Si $\dfrac{\partial\boldsymbol{f}}{\partial\boldsymbol{y}}(t,\boldsymbol{y})$ est continue et bornée, alors $\boldsymbol{f}$ satisfait (6).

Plan

On veut résoudre le problème de Cauchy **scalaire**:

$$(\mathcal{PC}) \quad \begin{cases} y'(t) &= f(t, y(t)), \quad \forall t \in [t^0, t^0 + T] \\ y(t^0) &= y_0 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

avec $f : [t^0, t^0 + T] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. On a vu (chapitre *Dérivation numérique*):

$$y'(t^n) = \frac{y(t^n + h) - y(t^n)}{h} + \mathcal{O}(h)$$
$$\Rightarrow \quad f(t^n, y(t^n)) = \frac{y(t^{n+1}) - y(t^n)}{h} + \mathcal{O}(h)$$

La méthode d'**Euler progressive** est alors donnée par le schéma

$$\begin{cases} y^{[n+1]} &= y^{[n]} + hf(t^n, y^{[n]}), \quad \forall n \in [\![0, N-1]\!] \\ y^{[0]} &= y(t^0) \end{cases} \tag{7}$$

avec $y^{[n]} \approx y(t^n)$.
Ce schéma est **explicite**, car il permet le calcul direct de $y^{[n+1]}$ en fonction de $y^{[n]}$.

On veut résoudre le problème de Cauchy **scalaire**:

$$(\mathcal{PC}) \quad \begin{cases} y'(t) &= f(t, y(t)), \quad \forall t \in [t^0, t^0 + T] \\ y(t^0) &= y_0 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

avec $f : [t^0, t^0 + T] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. On a vu (chapitre *Dérivation numérique*):

$$y'(t^{n+1}) = \frac{y(t^{n+1}) - y(t^{n+1} - h)}{h} + \mathcal{O}(h)$$
$$\Rightarrow \quad f(t^{n+1}, y(t^{n+1})) = \frac{y(t^{n+1}) - y(t^n)}{h} + \mathcal{O}(h)$$

La méthode d'**Euler régressive** est donnée par le schéma

$$\begin{cases} y^{[n+1]} &= y^{[n]} + hf(t^{n+1}, y^{[n+1]}), \quad \forall n \in [\![0, N-1]\!] \\ y^{[0]} &= y(t^0) \end{cases} \tag{8}$$

avec $y^{[n]} \approx y(t^n)$.
Ce schéma est **implicite**, car $y^{[n+1]}$ est définit implicitement en fonction de $y^{[n]}$. Il faut donc résoudre à chaque pas de temps une équation non-linéaire en utilisant des méthodes de point fixe par exemple.

Exercice

On veut résoudre numériquement le problème $(\mathcal{P})$ suivant : trouver y telle que

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} y'(t) &= \cos(t) + 1, \quad \forall t \in [0, 4\pi] \\ y(0) &= 0. \end{cases}$$

dont la solution exacte est $y(t) = \sin(t) + t$.
On rappelle le schéma d'Euler progressif pour la résolution d'un problème de Cauchy

$$(\mathcal{S}) \quad \begin{cases} y^{[n+1]} &= y^{[n]} + hf(t^n, y^{[n]}), \\ y^{[0]} & \text{donné.} \end{cases}$$

avec $(t^n)_{n0}^N$ discrétisation régulière de l'intervalle $[0, 4\pi]$ avec N pas de discrétisation.

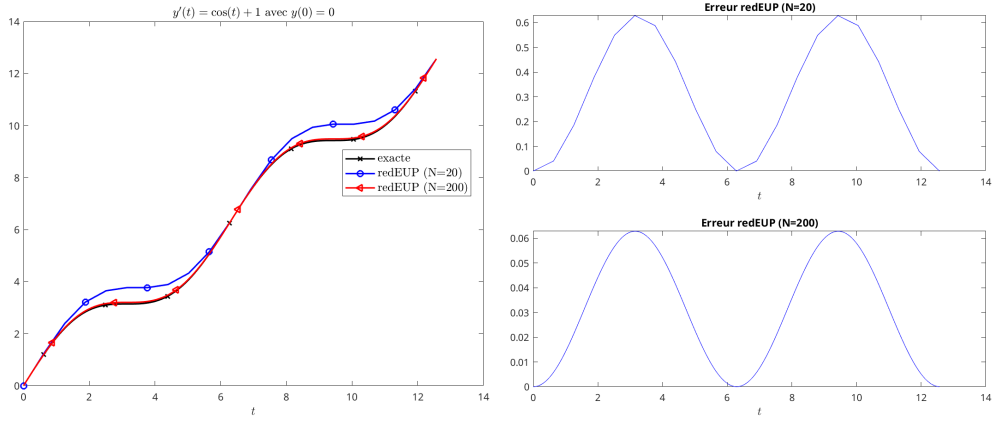
Q. 1 *Expliquer en détail comment utiliser le schéma d'Euler progressif pour résoudre le problème $(\mathcal{P})$ en précisant entre autres les données, les inconnues, les dimensions des variables, lien entre $y^{[n+1]}$ et la fonction y, ...*

Q. 2 *Soit a, b, $a < b$ deux réels. Ecrire une fonction* DisReg *retournant une discrétisation régulière de l'intervalle $[a; b]$ avec N pas de discrétisation.*

Q. 3 *Ecrire une fonction* redEUPsca *retournant l'ensemble des couples $(t^n, y^{[n+1]})_{n=0}^N$ calculés par le schéma d'Euler progressif.*

Q. 4 *Ecrire un algorithme complet de résolution de $(\mathcal{P})$ par le schéma d'Euler progressif.*

Résultats graphiques obtenus à partir des données de l'exercice



- Comment obtenir ces figures avec Matlab/Octave?
- Que peut-on *conjecturer* sur la convergence du schéma?


```m
function x=DisReg(a,b,N)
% Discretisation reguliere de l'intervalle [a,b]
% avec N pas de discretisation
% Donnees:
%   a,b : deux reels, a<b
%   N : nb de pas de discretisation
% Resultat:
%   x : tableau 1-par-(N+1) de reels
  h=(b-a)/N;
  x=zeros(1,N+1);
  for i=1:N+1,x(i)=a+(i-1)*h;end
end
```

Listing: Fonction DisReg: fichier `DisReg.m`


```m
function [t,Y]=redEUPsca(f,t0,T,y0,N)
% Resolution d'un probleme de Cauchy scalaire
% d'inconnue la fonction
%       y: [t0,t0.T] -> R
% par le schema d'Euler progressif
% Donnees:
%   f: [t0,t0.T] x R -> R
%   t0,T,y0 trois reels, T>0
%   N un entier non nul, nb de pas de discretisation
% Resultat:
%   t tableau de 1x(N+1) reels, discretisation
%   Y tableau 1x(N+1) reels, resultat tel que
%       Y(n) approximation de y(t(n))
%       avec n dans {1,...,N+1}.
  assert(length(y0)==1,'Utiliser la fonction redEUPvec ...
    pour pb Cauchy vectoriel')
  t=DisReg(t0,t0+T,N);
  h=T/N;
  Y=zeros(1,N+1);
  Y(1)=y0;
  for n=1:N
    Y(n+1)=Y(n)+h*f(t(n),Y(n));
  end
end
```

Listing: Fonction redEUPsca: fichier `redEUPsca.m`


```m
fCauchy=@(t,y) cos(t)+1;     % a modifier pour un autre probleme de Cauchy scalaire
solex=@(t) sin(t)+t;         % idem
t0=0;T=4*pi;N1=20;N2=10*N1; % idem
y0=solex(t0);

[t1,yEP1]=redEUPsca(fCauchy,t0,T,y0,N1);
[t2,yEP2]=redEUPsca(fCauchy,t0,T,y0,N2);

tex=DisReg(t0,t0+T,1000);
yex=solex(tex);  % doit etre vectorisee!

figure(1)
plot(tex,yex,'kx-','linewidth',1.5,'Markerindices',50:150:1000)
hold on
plot(t1,yEP1,'bo-','linewidth',1.5,'Markerindices',1:3:N1)
plot(t2,yEP2,'r<-','linewidth',1.5,'Markerindices',15:30:N2)

legend('exacte', sprintf('redEUP (N=%d)',N1), sprintf('redEUP (N=%d)',N2),'interpreter','latex','...
    fontsize',12,'Location','Best')
xlabel('$t$','interpreter','latex','fontsize',12)
title(sprintf("$y'(t)=\\cos(t)+1$ avec $y(0)=%g$",y0),'interpreter','latex','fontsize',12)

figure(2)
subplot(2,1,1)
plot(t1,abs(yEP1-solex(t1)),'b')
xlabel('$t$','interpreter','latex','fontsize',12)
title(sprintf('Erreur redEUP (N=%d)',N1))

subplot(2,1,2)
plot(t2,abs(yEP2-solex(t2)),'b')
xlabel('$t$','interpreter','latex','fontsize',12)
title(['Erreur redEUP (N=',num2str(N2),')'])
```

Listing: programme Matlab associé à l'exercice avec représentations graphiques

Plan

On veut résoudre le problème de Cauchy **vectoriel** :

$$(\mathcal{PC}) \quad \begin{cases} \boldsymbol{y}'(t) &= \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y}(t)), \quad \forall t \in [t^0, t^0 + T] \\ \boldsymbol{y}(t^0) &= \boldsymbol{y}_0 \in \mathbb{R}^m. \end{cases}$$

avec $f : [t^0, t^0 + T] \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $m \geqslant 2$.
La méthode d'**Euler progressive** est donnée par le schéma

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}^{[n+1]} &\overset{\mathbb{R}^m}{=} \boldsymbol{y}^{[n]} + h\boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]}), \ \forall n \in [\![0, N-1]\!] \\ \boldsymbol{y}^{[0]} &\overset{\mathbb{R}^m}{=} \boldsymbol{y}(t^0) \end{cases} \tag{9}$$

Ce schéma est **explicite**, car il permet le calcul direct de $\boldsymbol{y}^{[n+1]}$ en fonction de $\boldsymbol{y}^{[n]}$.

On veut résoudre le problème de Cauchy **vectoriel** :

$$(\mathcal{PC}) \quad \begin{cases} \boldsymbol{y}'(t) &= \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y}(t)), \quad \forall t \in [t^0, t^0 + T] \\ \boldsymbol{y}(t^0) &= \boldsymbol{y}_0 \in \mathbb{R}^m. \end{cases}$$

avec $f : [t^0, t^0 + T] \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $m \geqslant 2$.
La méthode d'**Euler régressive** est donnée par le schéma

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}^{[n+1]} &\overset{\mathbb{R}^m}{=} \boldsymbol{y}^{[n]} + h\boldsymbol{f}(t^{n+1}, \boldsymbol{y}^{[n+1]}), \quad \forall n \in [\![0, N-1]\!] \\ \boldsymbol{y}^{[0]} &\overset{\mathbb{R}^m}{=} \boldsymbol{y}(t^0) \end{cases} \tag{10}$$

Ce schéma est **implicite**, car $\boldsymbol{y}^{[n+1]}$ est définit implicitement en fonction de $\boldsymbol{y}^{[n]}$.

Exercice

Soit le problème de Cauchy **vectoriel**

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}'(t) &= \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y}(t)), \ \forall t \in [t^0, t^0 + T], \\ \boldsymbol{y}(t^0) &= \boldsymbol{y}_0 \in \mathbb{R}^m, \end{cases}$$

avec $\boldsymbol{f} : [t^0, t^0 + T] \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$. On souhaite écrire une fonction algorithmique redEUPVec permettant de résoudre ce problème de Cauchy (vectoriel) par le schéma **vectoriel** explicite d'Euler progressif

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}^{[n+1]} &= \boldsymbol{y}^{[n]} + h\boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]}), \ \forall n \in [\![0, N-1]\!] \\ \boldsymbol{y}^{[0]} &= \boldsymbol{y}_0 \end{cases}$$

avec $(t^n)_{n=0}^N$ la discrétisation régulière de $[t^0, t^0 + T]$ avec N pas de discrétisation et $\boldsymbol{y}^{[n]} = \begin{pmatrix} y_1^{[n]} \\ \vdots \\ y_m^{[n]} \end{pmatrix}$ et $\boldsymbol{y}^{[n]} \approx \boldsymbol{y}(t^n)$. Cette fonction devra retourner l'ensemble des t^n et des $\boldsymbol{y}^{[n]}$ pour $n[\![0, N]\!]$.

Q. 1

1. *Rappeler précisement les données du problème de Cauchy* ***vectoriel****.*
2. *Quelles sont les données de la fonction algorithmique* redEUPVec *en précisant le type et la dimension pour chacune?*
3. *Quelles sont les sorties/résultats de la fonction algorithmique* redEUPVec *en précisant le type et la dimension pour chacun?*

On rappelle l'écriture simplifiée d'accès aux colonnes d'une matrice décrit en section **??**

Algorithmique		
fonction	*version simplifiée*	*Description mathématique*
$\boldsymbol{u} \leftarrow$ getMatCol$(\mathbb{A}, j)$	$\boldsymbol{u} \leftarrow \mathbb{A}(:, j)$	$\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^m$ est déterminé par $\boldsymbol{u}_i = \mathbb{A}_{i,j}, \ \forall i \in [\![1, n]\!]$
$\mathbb{A} \leftarrow$ setMatCol$(\mathbb{A}, \boldsymbol{u}, j)$	$\mathbb{A}(:, j) \leftarrow \boldsymbol{u}$	la colonne j de $\mathbb{A}$ est remplacée par $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^m$ et on a $\mathbb{A}_{i,j} = \boldsymbol{u}_i, \ \forall i \in [\![1, n]\!]$.

Table: Accès algorithmique aux colonnes d'une matrice $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ décrit en section **??**

Q. 2 *Ecrire la fonction algorithmique* redEUPVec *permettant de résoudre ce problème de Cauchy (vectoriel) par le schéma explicite d'Euler progressif. On utilisera l'écriture algorithmique simplifiée d'accès aux éléments d'une matrice (voir Table 1).*

Q. 3 *Ecrire la fonction algorithmique* redEUPVecfun *permettant de résoudre ce problème de Cauchy (vectoriel) par le schéma explicite d'Euler progressif. On utilisera l'écriture algorithmique avec fonctions pour l'accès aux éléments d'une matrice (voir Table 1).*

Exercice

Soit l'équation différentielle ordinaire linéaire du troisième ordre avec conditions initiales données par

$$(1 + t + t^2)y^{(3)}(t) + (3 + 6t)y^{(2)}(t) + 6y^{(1)}(t) = 6t, \quad \forall t \in [0, T],$$
$$y(0) = \alpha, \quad y^{(1)}(0) = \beta, \quad y^{(2)}(0) = \gamma.$$

Ici $y^{(k)}$ note la dérivée k-ième de y.
Pour cette EDO, il existe une unique solution donnée par

$$y(t) = \frac{t^4 + 2At^2 + 4Bt + 4C}{4(t^2 + t + 1)}$$

avec $(A, B, C) \in \mathbb{R}^3$ vérifiant

$$C = \alpha, \quad B - C = \beta \ \text{ et } \ A - 2B = \gamma.$$

On a aussi

$$y^{(1)}(t) = \frac{t^3 + At + B}{t^2 + t + 1} - \frac{(t^4 + 2At^2 + 4Bt + 4C)(2t + 1)}{4(t^2 + t + 1)^2}$$
$$y^{(2)}(t) = \frac{3t^2 + A}{t^2 + t + 1} - \frac{2(t^3 + At + B)(2t + 1)}{(t^2 + t + 1)^2} + \frac{(t^4 + 2At^2 + 4Bt + 4C)(2t + 1)^2}{2(t^2 + t + 1)^3} - \frac{t^4 + 2At^2 + 4Bt + 4C}{2(t^2 + t + 1)^2}$$

Q. 1 *Déterminer le problème de Cauchy vectoriel associé à cette EDO*

Dans la suite, on prendra $T = 10$, $\alpha = 6$, $\beta = -5$ et $\gamma = -2$.

Q. 2 *Ecrire un programme permettant de résoudre numériquement le problème de Cauchy associé à cette EDO à l'aide de la fonction algorithmique* $[\boldsymbol{t}, Y] \leftarrow$ redEUPvec$(f, t0, T, Y0, N)$ *(voir Exercice précédent).*

On suppose que notre language algorithmique dispose d'une fonction graphique plot(X, Y) reliant par des segments les points successifs

$$(X(1), Y(1)), (X(2), Y(2)), \ldots, (X(end), Y(end))$$

les tableaux X et Y ayant même longeurs et correspondent respectivement aux tableaux des abscisses et des ordonnées.
On pourra utiliser la version simplifiée du langage algorithmique.

Q. 3 *Donner les commandes permettant, aprés avoir utilisé le programme algorithmique précédent, de représenter graphiquement les approximations obtenues par le schéma, de*

$$\left(y(t^n)\right)_{n=0}^N, \quad \left(y^{(1)}(t^n)\right)_{n=0}^N \ \text{ et } \ \left(y^{(2)}(t^n)\right)_{n=0}^N$$

Q. 4 *Ecrire un programme algorithmique permettant de représenter graphiquement les solutions exactes aux points de discrétisation, c'est à dire*

$$\left(y(t^n)\right)_{n=0}^N, \quad \left(y^{(1)}(t^n)\right)_{n=0}^N \ \text{ et } \ \left(y^{(2)}(t^n)\right)_{n=0}^N$$

Q. 5 *Ecrire un programme algorithmique permettant de représenter graphiquement les erreurs numériques commises en valeurs absolues par le schéma pour les approximations de*

$$\left(y(t^n)\right)_{n=0}^N, \quad \left(y^{(1)}(t^n)\right)_{n=0}^N \ \text{ et } \ \left(y^{(2)}(t^n)\right)_{n=0}^N$$

Plan