Méthodes Numériques II
Chapitre 1: Algorithmique
Exercices axés sur l'algèbre linéaire

version du 2026/02/10 à 08:05:23

Exercice 1

Soient $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$ et $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$.

Q. 1 *Ecrire une fonction* dot *permettant de calculer le produit scalaire du vecteur* $\boldsymbol{u}$ *par* $\boldsymbol{v}$*, noté mathématiquement par* $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle$. □

Q. 2 *Ecrire une fonction* norm2 *permettant de calculer la norme euclidienne du vecteur* $\boldsymbol{u}$ *donnée par* $\|\boldsymbol{u}\|_2 \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle}$. □

Soient a et b deux réels.

Q. 3 *Ecrire une fonction* aUpbV *permettant de calculer le vecteur* $\boldsymbol{w} \stackrel{\text{def}}{=} a\boldsymbol{u} + b\boldsymbol{v}$. □

Q. 4 *Ecrire un programme algorithmique permettant de calculer* $\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\|_2$ *avec* $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ *et* $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ □

Exercice 2

Q. 1 *Ecrire une fonction* VecZeros *retournant le vecteur nul de* $\mathbb{R}^n$. □

Q. 2 *Ecrire une fonction* VecConst *retournant le vecteur de* $\mathbb{R}^n$ *dont toutes les composantes valent* $\alpha \in \mathbb{R}$. □

Q. 3 *Soient* $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$ *et* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Ecrire une fonction* VecPlusConst *retournant le vecteur de* $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ *tel que*

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{u}_i + \alpha.^\dagger$$

□

On suppose que l'on dispose de la fonction algorithmique rand() retournant un réel aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0, 1]$.

Q. 4 *Ecrire une fonction* VecRand *retournant un vecteur de* $\mathbb{R}^n$ *dont toutes les composantes sont aléatoires suivant la loi uniforme sur* $[a, b]$. □

Exercice 3

Q. 1 *Ecrire une fonction* MatZeros *retournant la matrice nulle de* $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. □

† Cette opération n'est pas une opération algébrique dans $\mathbb{R}^n$, c'est à dire mathématiquent, on ne peut pas écrire $\boldsymbol{u} + \alpha$!

Q. 2 *Ecrire une fonction* MatConst *retournant la matrice de* $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ *dont toutes les composantes valent* $\alpha \in \mathbb{R}$. □

Q. 3 *Soient* $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ *et* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Ecrire une fonction* MatPlusConst *retournant la matrice* $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ *telle que*

$$\forall (i,j) \in [\![1,m]\!] \times [\![1,n]\!], \quad \mathbb{B}_{i,j} = \mathbb{A}_{i,j} + \alpha.^{\ddagger}$$

□

On suppose que l'on dispose de la fonction algorithmique rand() retournant un réel aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0,1]$.

Q. 4 *Ecrire une fonction* MatRand *retournant une matrice de* $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ *dont toutes les composantes sont aléatoires suivant la loi uniforme sur* $[a,b]$. □

Exercice 4

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.

Q. 1 a. *Ecrire une fonction algorithmique* setMatCol *permettant d'initialiser le* j*-ème vecteur colonne de* $\mathbb{A}$ *par un vecteur* $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m$, *avec* $j \in [\![1,n]\!]$.

b. *Ecrire une fonction algorithmique* getMatCol *retournant le* j*-ème vecteur colonne de* $\mathbb{A}$ *avec* $j \in [\![1,n]\!]$.

□

Q. 2 a. *Ecrire une fonction algorithmique* setMatRow *permettant d'initialiser le* i*-ème vecteur ligne de* $\mathbb{A}$ *par un vecteur* $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$, *avec* $i \in [\![1,m]\!]$.

b. *Ecrire une fonction algorithmique* getMatRow *retournant le* i*-ème vecteur ligne de* $\mathbb{A}$ *avec* $i \in [\![1,m]\!]$.

□

Exercice 5

Q. 1 *Soient* $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $\alpha \in \mathbb{R}$ *et* $\beta \in \mathbb{R}$ *Ecrire une fonction* aApbB *permettant de calculer la matrice* $\mathbb{W} \stackrel{\text{def}}{=} \alpha\mathbb{A} + \beta\mathbb{B}$. □

Q. 2 *Soient* $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ *et* $\boldsymbol{u}$ *un vecteur (colonne).*

a. *A quelle(s) condition(s) le produit de la matrice* $\mathbb{A}$ *par le vecteur* $\boldsymbol{u}$ *existe-t'il?*

b. *Sous les conditions précédentes, on note* $\boldsymbol{v} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{A}\boldsymbol{u}$.

- *A quel espace appartient* $\boldsymbol{v}$?
- *Rappeler précisement la formule permettant de calculer les composantes de* $\boldsymbol{v}$.

c. *Ecrire une fonction* ProdMatVec *permettant de calculer* $\boldsymbol{v} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{A}\boldsymbol{u}$.

d. *Donner un exemple algorithmique d'utilisation.*

□

Exercice 6

[‡] Cette opération n'est pas une opération algébrique dans $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, c'est à dire mathématiquent, on ne peut pas écrire $\mathbb{A} + \alpha$!

Q. 1 *Soient* $\boldsymbol{u}$ *et* $\boldsymbol{v}$ *deux vecteurs de* $\mathbb{R}^n$. *Ecrire la fonction* `ProdSca` *permettant de retourner le produit scalaire de ces deux vecteurs noté mathématiquement* $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle$. □

L'objectif de la suite de l'exercice est de voir plusieurs manières de programmer le produit d'une matrice par un vecteur. Soient $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^p$ et $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.

Q. 2 *a. Rappeler précisement les hypothèses et les formules permettant le calcul de* $\boldsymbol{v} = \mathbb{A}\boldsymbol{u}$.

b. Ecrire la fonction ProdMatVec *permettant de retourner* $\mathbb{A}\boldsymbol{u}$.

□

Voici quelques notations mathématiques (non standards) que l'on va utiliser. Si $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ alors

- $\mathbb{A}_{:,j}$ correspond au j-ème vecteur colonne de $\mathbb{A}$.
- $\mathbb{A}_{i,:}$ correspond au i-ème vecteur ligne de $\mathbb{A}$.

On suppose que l'on dispose des commandes suivantes au niveau algorithmique:

Description	*Avec fonction*	*Instruction simplifiée*
Obtenir la j-ème colonne d'une matrice $\mathbb{A}$ avec $j \in [\![1, n]\!]$, math. noté $\mathbb{A}_{:,j}$	$\boldsymbol{u} \leftarrow$ getMatCol$(\mathbb{A}, j)$	$\boldsymbol{u} \leftarrow \mathbb{A}(:, j)$
Obtenir la i-ème ligne d'une matrice $\mathbb{A}$ avec $i \in [\![1, m]\!]$, math. noté $\mathbb{A}_{i,:}$	$\boldsymbol{v} \leftarrow$ getMatRow$(\mathbb{A}, i)$	$\boldsymbol{v} \leftarrow \mathbb{A}(i, :)$
Remplacer la j-ème colonne d'une matrice $\mathbb{A}$ par un vecteur $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^m$ avec $j \in [\![1, n]\!]$	$\mathbb{A} \leftarrow$ setMatCol$(\mathbb{A}, \boldsymbol{u}, j)$	$\mathbb{A}(:, j) \leftarrow \boldsymbol{u}$
Remplacer la i-ème ligne d'une matrice $\mathbb{A}$ par un vecteur $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ avec $i \in [\![1, m]\!]$	$\mathbb{A} \leftarrow$ setMatRow$(\mathbb{A}, \boldsymbol{v}, j)$	$\mathbb{A}(i, :) \leftarrow \boldsymbol{v}$.

Table 1: Instructions algorithmiques pour accéder/modifier une ligne ou une colonne d'une matrice $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.

Q. 3 *a. Sous les hypothèses de* ***Q.2*** *et avec* $\boldsymbol{v} = \mathbb{A}\boldsymbol{u}$, *écrire mathématiquement* $\boldsymbol{v}_i$ *comme un produit scalaire en utilisant les notations précisées ci-dessus.*

b. Ecrire la fonction ProdMatVecFun *permettant de retourner* $\mathbb{A}\boldsymbol{u}$ *en utilisant la fonction* ProdSca *et les fonctions de la Table 1 (i.e. sans utiliser les instructions simplifiées).*

c. Ecrire la fonction ProdMatVecSim *permettant de retourner* $\mathbb{A}\boldsymbol{u}$ *en utilisant la fonction* ProdSca *et les instructions simplifiées de la Table 1 (i.e. sans utiliser les fonctions).*

□

Soient $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$.

Q. 4 *a. Rappeler précisement les hypothèses et les formules permettant le calcul de* $\mathbb{G} = \mathbb{A}\mathbb{B}$.

b. Ecrire la fonction ProdMatMat *permettant de retourner* $\mathbb{G}$.

□

Q. 5 *Sous les hypothèses trouvées en* **Q.4**, *on note* $\mathbb{G} = \mathbb{A}\mathbb{B}$.

a. En utilisant les notations mathèmatiques d'accès aux lignes et colonnes d'une matrice, écrire $\mathbb{G}_{i,j}$ *comme un produit scalaire entre un vecteur ligne de* $\mathbb{A}$ *et un vecteur colonne de* $\mathbb{B}$.

b. Ecrire la fonction ProdMatMatFun1 *permettant de retourner* $\mathbb{G}$ *en utilisant la formule trouvée en* **Q.5** a., *des fonctions de la Table 1 (i.e. sans utiliser les instructions simplifiées) et la fonction* ProdSca.

c. Ecrire la fonction ProdMatMatSim1 *permettant de retourner* $\mathbb{G}$ *en utilisant la formule trouvée en* **Q.5** a., *des instructions simplifiées de la Table 1 et la fonction* ProdSca.

□

Q. 6 *Sous les hypothèses trouvées en* **Q.4***, on note* $\mathbb{G} = \mathbb{A}\mathbb{B}$.

a. En utilisant les notations mathèmatiques d'accès aux lignes et colonnes d'une matrice, écrire $\mathbb{G}_{:,j}$ *(*j*-ème vecteur colonne de* $\mathbb{G}$*) comme le produit de la matrice* $\mathbb{A}$ *par un vecteur colonne de* $\mathbb{B}$.

b. Ecrire la fonction ProdMatMatFun2 *permettant de retourner* $\mathbb{G}$ *en utilisant la formule trouvée en* **Q.6** a.*, des fonctions de la Table 1 (i.e. sans utiliser les instructions simplifiées) et la fonction* ProdMatVecFun.

c. Ecrire la fonction ProdMatMatSim2 *permettant de retourner* $\mathbb{G}$ *en utilisant la formule trouvée en* **Q.6** a.*, des instructions simplifiées de la Table 1 et la fonction* ProdMatVecSim.

$\square$