Méthodes Numériques II
Chapitre 1: Algorithmique
Exercices axés sur l'algèbre linéaire

version du 2026/02/10 à 08:05:35

Exercice 1

Soient $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$ et $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$.

Q. 1 *Ecrire une fonction* dot *permettant de calculer le produit scalaire du vecteur* $\boldsymbol{u}$ *par* $\boldsymbol{v}$, *noté mathématiquement par* $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle$. □

R. 1 On a

$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{u}_i \boldsymbol{v}_i \in \mathbb{R}.$$

Voici une correction possible où l'on différencie la notation mathématique $\boldsymbol{u}_i$, i-ème composante du vecteur $\boldsymbol{u}$, et la notation algorithmique $\boldsymbol{U}(i)$ permettant d'accéder à l'élément i du tableau/vecteur $\boldsymbol{U}$, avec $i \in [\![1, n]\!]$.

Algorithme 1 Fonction dot, produit scalaire entre deux vecteurs.

Données : $\boldsymbol{U}$: vecteur/tableau de $\mathbb{R}^n$, tel que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\boldsymbol{U}(i) = \boldsymbol{u}_i$.
$\boldsymbol{V}$: vecteur/tableau de $\mathbb{R}^n$, tel que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\boldsymbol{V}(i) = \boldsymbol{v}_i$.
Résultat : r : le réel tel que $r = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle$.

```
Fonction r ← dot( U, V )
  r ← 0
  Pour i ← 1 à n faire
    r ← r + U(i) * V(i)
  Fin
Fin
```

On peut aussi utiliser la notation algorithmique $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^p$ pour décrire un vecteur/tableau de $\mathbb{R}^p$ et on a alors la correspondance suivante entre notation mathématique et algorithmique:

Description	*Mathématiques*	*Algorithmique*
Composante $i \in [\![1, p]\!]$ de $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^p$	$\boldsymbol{x}_i$	$\boldsymbol{x}(i)$

Cependant pour bien différencier ces deux types de notations, on continue dans cet exercice à noter $\boldsymbol{U}$ le vecteur algorithmique correpondant au vecteur mathématique $\boldsymbol{u}$.

Q. 2 *Ecrire une fonction* norm2 *permettant de calculer la norme euclidienne du vecteur* $\boldsymbol{u}$ *donnée par* $\|\boldsymbol{u}\|_2 \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle}$. □

R. 2 Voici une correction possible:

Algorithme 2 Fonction norm2

Données : $\boldsymbol{U}$: vecteur/tableau de $\mathbb{R}^n$, tel que $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\boldsymbol{U}(i) = \boldsymbol{u}_i$.

Résultat : r : le réel tel que $r = \|\boldsymbol{u}\|_2 \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle}$.

```
Fonction r ← norm2( U )
  r ← Sqrt(dot(U, U))
Fin
```

Soient a et b deux réels.

Q. 3 *Ecrire une fonction* aUpbV *permettant de calculer le vecteur* $\boldsymbol{w} \stackrel{\text{def}}{=} a\boldsymbol{u} + b\boldsymbol{v}$. □

R. 3 On a $\boldsymbol{w} \stackrel{\text{def}}{=} a\boldsymbol{u} + b\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ et plus précisement

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \quad \boldsymbol{w}_i \stackrel{\text{def}}{=} a\boldsymbol{u}_i + b\boldsymbol{v}_i.$$

Voici une correction possible:

Algorithme 3 Fonction aUpbV

Données :
- $\boldsymbol{U}$: vecteur/tableau de $\mathbb{R}^n$, tel que $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\boldsymbol{U}(i) = \boldsymbol{u}_i$.
- $\boldsymbol{V}$: vecteur/tableau de $\mathbb{R}^n$, tel que $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\boldsymbol{V}(i) = \boldsymbol{v}_i$.
- a : un réel,
- b : un réel.

Résultat : $\boldsymbol{W}$: vecteur/tableau de $\mathbb{R}^n$, tel que $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\boldsymbol{W}(i) = \boldsymbol{w}_i$, avec $\boldsymbol{w}_i \stackrel{\text{def}}{=} a\boldsymbol{u}_i + b\boldsymbol{v}_i$.

```
Fonction W ← aUpbV( a, U, b, V )
  Pour i ← 1 à n faire
    W(i) ← a * U(i) + b * V(i)
  Fin
Fin
```

Q. 4 *Ecrire un programme algorithmique permettant de calculer* $\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\|_2$ *avec* $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ *et* $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ □

R. 4 Voici un premier programme possible:

$\boldsymbol{U} \leftarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{V} \leftarrow \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$x \leftarrow \text{norm2}(\text{aUpbV}(1, \boldsymbol{U}, -1, \boldsymbol{V}))$ ▷ x contient le réel $\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\|_2$

On peut aussi écrire directement

$\boldsymbol{x} \leftarrow \text{norm2}\Big(\text{aUpbV}\big(1, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, -1, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}\big)\Big)$ $\quad\triangleright$ x contient le réel $\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\|_2$

Exercice 2

Q. 1 *Ecrire une fonction* VecZeros *retournant le vecteur nul de* $\mathbb{R}^n$. □

R. 1 Voici une correction possible

Algorithme 4 Fonction VecZeros retournant le vecteur nul de $\mathbb{R}^n$.

Données : n : un entier > 0.
Résultat : $\boldsymbol{z}$: le vecteur nul de $\mathbb{R}^n$.

```
Fonction z ← VecZeros( n )
  Pour i ← 1 à n faire
    z(i) ← 0
  Fin
Fin
```

Q. 2 *Ecrire une fonction* VecConst *retournant le vecteur de* $\mathbb{R}^n$ *dont toutes les composantes valent* $\alpha \in \mathbb{R}$. □

R. 2 Voici une correction possible

Algorithme 5 Fonction VecConst retournant le vecteur $\boldsymbol{v}$ de $\mathbb{R}^n$ dont toutes les composantes valent $\alpha \in \mathbb{R}$.

Données : n : un entier > 0,
α : un réel.
Résultat : $\boldsymbol{v}$: vecteur de $\mathbb{R}^n$.

```
Fonction v ← VecConst( n, α )
  Pour i ← 1 à n faire
    v(i) ← α
  Fin
Fin
```

Q. 3 *Soient* $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$ *et* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Ecrire une fonction* VecPlusConst *retournant le vecteur de* $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ *tel que*

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{u}_i + \alpha.$$ [†]

□

[†] Cette opération n'est pas une opération algébrique dans $\mathbb{R}^n$, c'est à dire mathématiquent, on ne peut pas écrire $\boldsymbol{u} + \alpha$!

R. 3 Voici une correction possible

Algorithme 6 Fonction VecPlusConst retournant le vecteur $\boldsymbol{v}$ de $\mathbb{R}^n$ tel que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{u}_i + \alpha$ avec

Données : $\boldsymbol{u}$: vecteur de $\mathbb{R}^n$,
α : un réel.
Résultat : $\boldsymbol{v}$: vecteur de $\mathbb{R}^n$.

```
Fonction v ← VecPlusConst( u, α )
  Pour i ← 1 à n faire
    v(i) ← u(i) + α
  Fin
Fin
```

On suppose que l'on dispose de la fonction algorithmique rand() retournant un réel aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0, 1]$.

Q. 4 *Ecrire une fonction* VecRand *retournant un vecteur de* $\mathbb{R}^n$ *dont toutes les composantes sont aléatoires suivant la loi uniforme sur* $[a, b]$. □

R. 4 On rappelle le changement de variable permettant de passer de l'intervalle $[0, 1]$ à l'intervalle $[a, b]$

$$\forall t \in [0, 1], \quad x = a + (b - a)t, \text{ avec } x \in [a, b].$$

Donc, si T est une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0, 1]$, alors $X = a + (b - a)T$ est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $[a, b]$.
Voici une correction possible

Algorithme 7 Fonction VecRand retournant un vecteur dont toutes les composantes sont aléatoires suivant la loi uniforme sur $[a, b]$.

Données : n : un entier > 0,
a : un réel,
b : un réel, tel que $a < b$.
Résultat : $\boldsymbol{x}$: vecteur de $\mathbb{R}^n$.

```
Fonction x ← VecRand( n, a, b )
  Pour i ← 1 à n faire
    x(i) ← a + (b − a) ∗ rand()
  Fin
Fin
```

Exercice 3

Q. 1 *Ecrire une fonction* MatZeros *retournant la matrice nulle de* $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. □

R. 1 Voici une correction possible

Algorithme 8 Fonction MatZeros la matrice nulle de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.

Données : m : un entier > 0,
n : un entier > 0.
Résultat : $\mathbb{Z}$: la matrice nulle de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.

Fonction $\mathbb{Z} \leftarrow$ MatZeros(m, n)
  Pour $i \leftarrow 1$ **à** m **faire**
    Pour $j \leftarrow 1$ **à** n **faire**
      $\mathbb{Z}(i, j) \leftarrow 0$
    Fin
  Fin
Fin

Q. 2 *Ecrire une fonction* MatConst *retournant la matrice de* $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ *dont toutes les composantes valent* $\alpha \in \mathbb{R}$. □

R. 2 Voici une correction possible

Algorithme 9 Fonction MatConst retournant la matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ dont toutes les composantes valent $\alpha \in \mathbb{R}$.

Données : m : un entier > 0,
n : un entier > 0,
α : un réel.
Résultat : $\mathbb{Z}$: matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.

Fonction $\boldsymbol{v} \leftarrow$ MatConst(m, n, α)
  Pour $i \leftarrow 1$ **à** m **faire**
    Pour $j \leftarrow 1$ **à** n **faire**
      $\mathbb{Z}(i, j) \leftarrow \alpha$
    Fin
  Fin
Fin

Q. 3 *Soient* $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ *et* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Ecrire une fonction* MatPlusConst *retournant la matrice* $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ *telle que*

$$\forall (i, j) \in [\![1, m]\!] \times [\![1, n]\!], \quad \mathbb{B}_{i,j} = \mathbb{A}_{i,j} + \alpha.$$[‡]

□

R. 3 Voici une correction possible

[‡]Cette opération n'est pas une opération algébrique dans $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, c'est à dire mathématiquent, on ne peut pas écrire $\mathbb{A} + \alpha$!

Algorithme 10 Fonction MatPlusConst retournant la matrice $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ telle que $\forall (i,j) \in [\![1,m]\!] \times [\![1,n]\!]$, $\mathbb{B}_{i,j} = \mathbb{A}_{i,j} + \alpha$.

Données : $\mathbb{A}$: matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$,
α : un réel.
Résultat : $\mathbb{B}$: matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.

Fonction $\mathbb{B} \leftarrow$ MatConst($\mathbb{A}, \alpha$)
  Pour $i \leftarrow 1$ **à** m **faire**
    Pour $j \leftarrow 1$ **à** n **faire**
      $\mathbb{B}(i,j) \leftarrow \mathbb{A}(i,j) + \alpha$
    Fin
  Fin
Fin

On suppose que l'on dispose de la fonction algorithmique rand() retournant un réel aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0,1]$.

Q. 4 *Ecrire une fonction* MatRand *retournant une matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ dont toutes les composantes sont aléatoires suivant la loi uniforme sur $[a,b]$.* □

R. 4 On rappelle le changement de variable permettant de passer de l'intervalle $[0,1]$ à l'intervalle $[a,b]$

$$\forall t \in [0,1], \quad x = a + (b-a)t, \text{ avec } x \in [a,b].$$

Donc, si T est une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0,1]$, alors $X = a + (b-a)T$ est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $[a,b]$.
Voici une correction possible

Algorithme 11 Fonction MatRand retournant une matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ dont toutes les composantes sont aléatoires suivant la loi uniforme sur $[a,b]$.

Données : m : un entier > 0,
n : un entier > 0,
a : un réel,
b : un réel, tel que $a < b$.
Résultat : $\mathbb{X}$: matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.

Fonction $\mathbb{X} \leftarrow$ MatRand(m, n, a, b)
  Pour $i \leftarrow 1$ **à** m **faire**
    Pour $j \leftarrow 1$ **à** n **faire**
      $\mathbb{X}(i,j) \leftarrow a + (b-a) *$ rand()
    Fin
  Fin
Fin

Exercice 4

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.

Q. 1 a. *Ecrire une fonction algorithmique* setMatCol *permettant d'initialiser le j-ème vecteur colonne de $\mathbb{A}$ par un vecteur $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m$, avec $j \in [\![1,n]\!]$.*

b. Ecrire une fonction algorithmique getMatCol *retournant le j-ème vecteur colonne de $\mathbb{A}$ avec $j \in [\![1, n]\!]$.*

□

R. 1 Mathématiquement, le j-ème vecteur colonne de $\mathbb{A}$ le vecteur (colonne) de $\mathbb{R}^m$ donné par

$$\begin{pmatrix} \mathbb{A}_{1,j} \\ \vdots \\ \mathbb{A}_{m,j} \end{pmatrix}.$$

a. Voici une correction possible

Algorithme 12 Fonction setMatCol

Données :	$\mathbb{A}$	:	matrice de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$
	$\boldsymbol{x}$	:	vecteur de $\mathbb{R}^n$,
	j	:	entier dans $[\![1, m]\!]$.
Résultat :	$\mathbb{A}$	:	la matrice $\mathbb{A}$ modifiée.

Fonction $\mathbb{A} \leftarrow$ setMatCol($\mathbb{A}, \boldsymbol{x}, j$)
  Pour $i \leftarrow 1$ **à** n **faire**
    $\mathbb{A}(i, j) \leftarrow \boldsymbol{x}(i)$
  Fin
Fin

b. Voici une correction possible

Algorithme 13 Fonction getMatCol

Données :	$\mathbb{A}$	:	matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$
	j	:	entier dans $[\![1, n]\!]$.
Résultat :	$\boldsymbol{x}$	:	vecteur de $\mathbb{R}^m$, colonne j de $\mathbb{A}$.

Fonction $\boldsymbol{x} \leftarrow$ getMatCol($\mathbb{A}, j$)
  Pour $i \leftarrow 1$ **à** n **faire**
    $\boldsymbol{x}(i) \leftarrow \mathbb{A}(i, j)$
  Fin
Fin

Q. 2 *a. Ecrire une fonction algorithmique* setMatRow *permettant d'initialiser le i-ème vecteur ligne de $\mathbb{A}$ par un vecteur $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$, avec $i \in [\![1, m]\!]$.*

b. Ecrire une fonction algorithmique getMatRow *retournant le i-ème vecteur ligne de $\mathbb{A}$ avec $i \in [\![1, m]\!]$.*

□

R. 2 Le i-ème vecteur ligne de $\mathbb{A}$ est le vecteur ligne de $\mathbb{R}^n$ donné par

$$\begin{pmatrix} \mathbb{A}_{i,1} & \dots & \mathbb{A}_{i,n} \end{pmatrix}.$$

a. Voici une correction possible

Algorithme 14 Fonction setMatRow

Données : $\mathbb{A}$: matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$
$\boldsymbol{x}$: vecteur de $\mathbb{R}^n$,
i : entier dans $[\![1, m]\!]$.
Résultat : $\mathbb{A}$: la matrice $\mathbb{A}$ modifiée.

```
Fonction 𝔸 ← setMatRow( 𝔸, x, i )
  Pour j ← 1 à n faire
    𝔸(i, j) ← x(j)
  Fin
Fin
```

b. Voici une correction possible

Algorithme 15 Fonction getMatRow

Données : $\mathbb{A}$: matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$
i : entier dans $[\![1, m]\!]$.
Résultat : $\boldsymbol{x}$: vecteur de $\mathbb{R}^n$, ligne i de $\mathbb{A}$.

```
Fonction x ← getMatCol( 𝔸, i )
  Pour j ← 1 à m faire
    x(j) ← 𝔸(i, j)
  Fin
Fin
```

Exercice 5

Q. 1 *Soient* $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $\alpha \in \mathbb{R}$ *et* $\beta \in \mathbb{R}$ *Ecrire une fonction* aApbB *permettant de calculer la matrice* $\mathbb{W} \stackrel{\text{def}}{=} \alpha\mathbb{A} + \beta\mathbb{B}$. □

R. 1 La matrice $\mathbb{W}$ est aussi dans $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et on a

$$\forall (i,j) \in [\![1, m]\!] \times [\![1, n]\!], \quad \mathbb{W}_{i,j} = \alpha\mathbb{A}_{i,j} + \beta\mathbb{B}_{i,j}.$$

Voici une correction possible

Algorithme 16 Fonction aApbB retournant la matrice $\mathbb{W} \stackrel{\text{def}}{=} \alpha\mathbb{A} + \beta\mathbb{B}$.

Données : $\mathbb{A}$: matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$,
$\mathbb{B}$: matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$,
α : un réel,
β : un réel.

Résultat : $\mathbb{W}$: matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.

```
Fonction W ← aApbB( α, A, β, B )
  Pour i ← 1 à m faire
    Pour j ← 1 à n faire
      W(i, j) ← α * A(i, j) + β * B(i, j)
    Fin
  Fin
Fin
```

Q. 2 *Soient $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $\boldsymbol{u}$ un vecteur (colonne).*

a. A quelle(s) condition(s) le produit de la matrice $\mathbb{A}$ par le vecteur $\boldsymbol{u}$ existe-t'il?

b. Sous les conditions précédentes, on note $\boldsymbol{v} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{A}\boldsymbol{u}$.

- *A quel espace appartient $\boldsymbol{v}$?*
- *Rappeler précisement la formule permettant de calculer les composantes de $\boldsymbol{v}$.*

c. Ecrire une fonction ProdMatVec *permettant de calculer $\boldsymbol{v} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{A}\boldsymbol{u}$.*

d. Donner un exemple algorithmique d'utilisation.

□

R. 2 a. Pour que le produit de la matrice $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ par un vecteur (colonne) $\boldsymbol{u}$ soit possible il faut et il suffit que la dimension du vecteur (nombre de lignes) soit égale au nombre de colonnes de $\mathbb{A}$, et donc $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$.

b. Avec $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$, on a alors $\boldsymbol{v} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{A}\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^m$. et

$$\forall i \in [\![1, m]\!], \quad \boldsymbol{v}_i = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{A}_{i,j}\boldsymbol{u}_j.$$

c. Voici une manière d'obtenir l'algorithme en utilisant une méthode de raffinements succéssifs et les notations mathématiques pour accéder aux composantes des vecteurs et des matrices

Algorithme 17 $\boxed{\mathcal{R}_0}$

1: $\boxed{\text{Calcul de } \boldsymbol{v}}$

Algorithme 17 $\boxed{\mathcal{R}_1}$

1: **Pour** $i = 1$ **à** m **faire**
2: $\quad \boldsymbol{v}_i \leftarrow \sum_{j=1}^{n} \mathbb{A}_{i,j}\boldsymbol{u}_j$
3: **Fin**

Algorithme 17 $\boxed{\mathcal{R}_1}$

> **Pour** $i \leftarrow 1$ **à** m **faire**
> $\quad \boxed{\boldsymbol{v}_i \leftarrow \sum_{j=1}^{n} \mathbb{A}_{i,j}\boldsymbol{u}_j}$
> **Fin**

Algorithme 17 $\boxed{\mathcal{R}_2}$

> **Pour** $i \leftarrow 1$ **à** m **faire**
> $\quad \boldsymbol{v}_i \leftarrow 0$
> $\quad$ **Pour** $j \leftarrow 1$ **à** n **faire**
> $\quad\quad \boldsymbol{v}_i \leftarrow \boldsymbol{v}_i + \mathbb{A}_{i,j}\boldsymbol{u}_j$
> $\quad$ **Fin**
> **Fin**

Pour écrire la fonction algorithmique, il nous faut passer des notations matématiques aux notations algorithmiques pour les matrices et vecteurs. Les correspondancec sont données en Table 2.

Description	*Mathématiques*	*Algorithmique*
Composante $i \in [\![1,p]\!]$ de $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^p$	$\boldsymbol{x}_i$	$\boldsymbol{x}(i)$
Composante $(i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,q]\!]$ de $\mathbb{Z} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$,	$\mathbb{Z}_{i,j}$	$\mathbb{Z}(i,j)$

Table 1: Correspondance entre les notations mathématiques et algorithmiques pour les matrices et vecteurs

On obtient alors la fonction

Algorithme 17 Fonction ProdMatVec retournant le vecteur $\boldsymbol{v} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{A}\boldsymbol{u}$, produit de la matrice $\mathbb{A}$ par le vecteur $\boldsymbol{u}$.

Données : $\mathbb{A}$: matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$,
$\quad\quad\quad\quad$ $\boldsymbol{u}$: vecteur de $\mathbb{R}^n$.
Résultat : $\boldsymbol{v}$: vecteur de $\mathbb{R}^m$ tel que $\boldsymbol{v} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{A}\boldsymbol{u}$.

> **Fonction** $\boldsymbol{v} \leftarrow$ ProdMatVec($\mathbb{A}, \boldsymbol{u}$)
> $\quad$ **Pour** $i \leftarrow 1$ **à** m **faire**
> $\quad\quad \boldsymbol{v}(i) \leftarrow 0$
> $\quad\quad$ **Pour** $j \leftarrow 1$ **à** n **faire**
> $\quad\quad\quad \boldsymbol{v}(i) \leftarrow \boldsymbol{v}(i) + \mathbb{A}(i,j) * \boldsymbol{u}(j)$
> $\quad\quad$ **Fin**
> $\quad$ **Fin**
> **Fin**

d. Par exemple,

$$\boldsymbol{x} \leftarrow \text{ProdMatVec}(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix})$$

Exercice 6

Q. 1 *Soient* $\boldsymbol{u}$ *et* $\boldsymbol{v}$ *deux vecteurs de* $\mathbb{R}^n$*. Ecrire la fonction* `ProdSca` *permettant de retourner le produit scalaire de ces deux vecteurs noté mathématiquement* $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle$. □

R. 1 On a
$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{u}_i \boldsymbol{v}_i \in \mathbb{R}.$$
Voici une correction possible où l'on identifie la notation mathématique $\boldsymbol{u}_i$, i-ème composante du vecteur $\boldsymbol{u}$, et la notation algorithmique $\boldsymbol{u}(i)$ permettant d'accéder à l'élément i du tableau/vecteur $\boldsymbol{u}$, avec $i \in [\![1, n]\!]$.

Algorithme 18 Fonction ProSca, produit scalaire entre deux vecteurs.

Données : $\boldsymbol{u}$: vecteur/tableau de $\mathbb{R}^n$, tel que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\boldsymbol{u}(i) = \boldsymbol{u}_i$.
$\boldsymbol{v}$: vecteur/tableau de $\mathbb{R}^n$, tel que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\boldsymbol{v}(i) = \boldsymbol{v}_i$.
Résultat : r : le réel tel que $r = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle$.

```
Fonction r ← ProSca( u, v ) r ← 0
  Pour i ← 1 à n faire
    r ← r + u(i) * v(i)
  Fin
Fin
```

L'objectif de la suite de l'exercice est de voir plusieurs manières de programmer le produit d'une matrice par un vecteur. Soient $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^p$ et $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.

Q. 2 a. *Rappeler précisement les hypothèses et les formules permettant le calcul de* $\boldsymbol{v} = \mathbb{A}\boldsymbol{u}$.

b. *Ecrire la fonction* ProdMatVec *permettant de retourner* $\mathbb{A}\boldsymbol{u}$.

□

R. 2 a. Pour que le produit de la matrice $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ par un vecteur (colonne) $\boldsymbol{u}$ soit possible il faut et il suffit que la dimension du vecteur (nombre de lignes) soit égale au nombre de colonnes de $\mathbb{A}$, et donc $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$.

b. Avec $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$, on a alors $\boldsymbol{v} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{A}\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^m$. et
$$\forall i \in [\![1, m]\!], \quad \boldsymbol{v}_i = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{A}_{i,j} \boldsymbol{u}_j.$$

c. Voici une manière d'obtenir l'algorithme en utilisant une méthode de raffinements succéssifs et les notations mathématiques pour accéder aux composantes des vecteurs et des matrices

Algorithme 19 $\mathcal{R}_0$

$\boxed{\text{Calcul de } \boldsymbol{v}}$

Algorithme 19 $\mathcal{R}_1$

Pour $i \leftarrow 1$ **à** m **faire**
  $\boldsymbol{v}_i \leftarrow \sum_{j=1}^{n} \mathbb{A}_{i,j} \boldsymbol{u}_j$
Fin

Algorithme 19 $\mathcal{R}_1$

Pour $i \leftarrow 1$ **à** m **faire**
  $\boxed{\boldsymbol{v}_i \leftarrow \sum_{j=1}^{n} \mathbb{A}_{i,j} \boldsymbol{u}_j}$
Fin

Algorithme 19 $\mathcal{R}_2$

Pour $i \leftarrow 1$ **à** m **faire**
  $\boldsymbol{v}_i \leftarrow 0$
  Pour $j \leftarrow 1$ **à** n **faire**
    $\boldsymbol{v}_i \leftarrow \boldsymbol{v}_i + \mathbb{A}_{i,j} \boldsymbol{u}_j$
  Fin
Fin

Pour écrire la fonction algorithmique, il nous faut passer des notations matématiques aux notations algorithmiques pour les matrices et vecteurs. Les correspondancec sont données en Table 2.

Description	*Mathématiques*	*Algorithmique*
Composante $i \in [\![1,p]\!]$ de $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^p$	$\boldsymbol{x}_i$	$\boldsymbol{x}(i)$
Composante $(i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,q]\!]$ de $\mathbb{Z} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$,	$\mathbb{Z}_{i,j}$	$\mathbb{Z}(i,j)$

Table 2: Correspondance entre les notations mathématiques et algorithmiques pour les matrices et vecteurs

On obtient alors la fonction

Algorithme 19 Fonction ProdMatVec1 retournant le vecteur $\boldsymbol{v} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{A}\boldsymbol{u}$, produit de la matrice $\mathbb{A}$ par le vecteur $\boldsymbol{u}$.

Données : $\mathbb{A}$: matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$,
$\boldsymbol{u}$: vecteur de $\mathbb{R}^n$.

Résultat : $\boldsymbol{v}$: vecteur de $\mathbb{R}^m$ tel que $\boldsymbol{v} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{A}\boldsymbol{u}$.

Fonction $\boldsymbol{v} \leftarrow$ ProdMatVec1($\mathbb{A}, \boldsymbol{u}$)
  Pour $i \leftarrow 1$ **à** m **faire**
    $\boldsymbol{v}(i) \leftarrow 0$
    Pour $j \leftarrow 1$ **à** n **faire**
      $\boldsymbol{v}(i) \leftarrow \boldsymbol{v}(i) + \mathbb{A}(i,j) * \boldsymbol{u}(j)$
    Fin
  Fin
Fin

Voici quelques notations mathématiques (non standards) que l'on va utiliser. Si $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ alors

- $\mathbb{A}_{:,j}$ correspond au j-ème vecteur colonne de $\mathbb{A}$.
- $\mathbb{A}_{i,:}$ correspond au i-ème vecteur ligne de $\mathbb{A}$.

On suppose que l'on dispose des commandes suivantes au niveau algorithmique:

Description	*Avec fonction*	*Instruction simplifiée*
Obtenir la j-ème colonne d'une matrice $\mathbb{A}$ avec $j \in [\![1,n]\!]$, math. noté $\mathbb{A}_{:,j}$	$\boldsymbol{u} \leftarrow$ getMatCol$(\mathbb{A}, j)$	$\boldsymbol{u} \leftarrow \mathbb{A}(:,j)$
Obtenir la i-ème ligne d'une matrice $\mathbb{A}$ avec $i \in [\![1,m]\!]$, math. noté $\mathbb{A}_{i,:}$	$\boldsymbol{v} \leftarrow$ getMatRow$(\mathbb{A}, i)$	$\boldsymbol{v} \leftarrow \mathbb{A}(i,:)$
Remplacer la j-ème colonne d'une matrice $\mathbb{A}$ par un vecteur $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^m$ avec $j \in [\![1,n]\!]$	$\mathbb{A} \leftarrow$ setMatCol$(\mathbb{A}, \boldsymbol{u}, j)$	$\mathbb{A}(:,j) \leftarrow \boldsymbol{u}$
Remplacer la i-ème ligne d'une matrice $\mathbb{A}$ par un vecteur $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ avec $i \in [\![1,m]\!]$	$\mathbb{A} \leftarrow$ setMatRow$(\mathbb{A}, \boldsymbol{v}, j)$	$\mathbb{A}(i,:) \leftarrow \boldsymbol{v}$.

Table 3: Instructions algorithmiques pour accéder/modifier une ligne ou une colonne d'une matrice $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.

Q. 3 *a. Sous les hypothèses de* ***Q.2*** *et avec* $\boldsymbol{v} = \mathbb{A}\boldsymbol{u}$, *écrire mathématiquement* $\boldsymbol{v}_i$ *comme un produit scalaire en utilisant les notations précisées ci-dessus.*

b. Ecrire la fonction ProdMatVecFun *permettant de retourner* $\mathbb{A}\boldsymbol{u}$ *en utilisant la fonction* ProdSca *et les fonctions de la Table 3 (i.e. sans utiliser les instructions simplifiées).*

c. *Ecrire la fonction* ProdMatVecSim *permettant de retourner* $\mathbb{A}\boldsymbol{u}$ *en utilisant la fonction* ProdSca *et les instructions simplifiées de la Table 3 (i.e. sans utiliser les fonctions).*

□

R. 3 a. On peut voir le calcul de $\boldsymbol{v}_i$, $i \in [\![1, m]\!]$ comme étant le produit scalaire de la i-ème ligne de $\mathbb{A}$ par le vecteur $\boldsymbol{u}$. On a donc

$$\forall i \in [\![1, m]\!], \quad \boldsymbol{v}_i = \langle \mathbb{A}(i, :), \boldsymbol{u} \rangle .$$

b. Voici une manière d'obtenir l'algorithme en utilisant une méthode de raffinements succéssifs et les notations mathématiques pour accéder aux composantes des vecteurs et des matrices

Algorithme 20 $\mathcal{R}_0$

$\boxed{\text{Calcul de } \boldsymbol{v}}$

Algorithme 20 $\mathcal{R}_1$

Pour $i \leftarrow 1$ **à** m **faire**
  $\boldsymbol{v}_i \leftarrow \langle \mathbb{A}(i, :), \boldsymbol{u} \rangle$
Fin

On obtient alors en utilisant des fonctions de la Table 3

Algorithme 20 Fonction ProdMatVecFun retournant le vecteur $\boldsymbol{v} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{A}\boldsymbol{u}$, produit de la matrice $\mathbb{A}$ par le vecteur $\boldsymbol{u}$.

Données : $\mathbb{A}$: matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$,
$\boldsymbol{u}$: vecteur de $\mathbb{R}^n$.
Résultat : $\boldsymbol{v}$: vecteur de $\mathbb{R}^m$ tel que $\boldsymbol{v} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{A}\boldsymbol{u}$.

Fonction $\boldsymbol{v} \leftarrow$ ProdMatVec1($\mathbb{A}, \boldsymbol{u}$)
  Pour $i \leftarrow 1$ **à** m **faire**
    $\boldsymbol{v}(i) \leftarrow$ ProdSca$\big($getMatRow$(\mathbb{A}, i), \boldsymbol{u}\big)$
  Fin
Fin

c. En utilisant les instructions simplifiées de la Table 3

Algorithme 21 Fonction ProdMatVecFun retournant le vecteur $\boldsymbol{v} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{A}\boldsymbol{u}$, produit de la matrice $\mathbb{A}$ par le vecteur $\boldsymbol{u}$.

Données : $\mathbb{A}$: matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$,
$\boldsymbol{u}$: vecteur de $\mathbb{R}^n$.
Résultat : $\boldsymbol{v}$: vecteur de $\mathbb{R}^m$ tel que $\boldsymbol{v} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{A}\boldsymbol{u}$.

Fonction $\boldsymbol{v} \leftarrow$ ProdMatVec1($\mathbb{A}, \boldsymbol{u}$)
  Pour $i \leftarrow 1$ **à** m **faire**
    $\boldsymbol{v}(i) \leftarrow$ ProdSca$\big(\mathbb{A}(i, :), \boldsymbol{u}\big)$
  Fin
Fin

Soient $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$.

Q. 4 a. *Rappeler précisement les hypothèses et les formules permettant le calcul de* $\mathbb{G} = \mathbb{A}\mathbb{B}$.

b. *Ecrire la fonction* ProdMatMat *permettant de retourner* $\mathbb{G}$.

□

R. 4 a. Le calcul du produit matricielle $\mathbb{A}\mathbb{B}$, avec $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, est possible si et seulement si le nombre de colonnes de $\mathbb{A}$ est égale au nombre de lignes de $\mathbb{B}$, c'est à dire $n = p$. Dans ce cas, la matrice résultat $\mathbb{G} \in \mathcal{M}_{m,q}(\mathbb{R})$ et on a

$$\forall (i,j) \in [\![1,m]\!] \times [\![1,q]\!], \quad \mathbb{G}_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{A}_{i,k}\mathbb{B}_{k,j}.$$

b. Voici une manière d'obtenir l'algorithme en utilisant une méthode de raffinements succéssifs et les notations mathématiques usuels pour accéder aux composantes des vecteurs et des matrices

Algorithme 22 $\mathcal{R}_0$

```
Calcul de 𝔾
```

Algorithme 22 $\mathcal{R}_1$

```
Pour i ← 1 à m faire
    Pour j ← 1 à q faire
        𝔾_{i,j} ← Σ_{k=1}^{n} 𝔸_{i,k} 𝔹_{k,j}
    Fin
Fin
```

Algorithme 22 $\mathcal{R}_1$

```
Pour i ← 1 à m faire
    Pour j ← 1 à q faire
        𝔾_{i,j} ← Σ_{k=1}^{n} 𝔸_{i,k} 𝔹_{k,j}
    Fin
Fin
```

Algorithme 22 $\mathcal{R}_2$

```
Pour i ← 1 à m faire
    Pour j ← 1 à q faire
        S ← 0
        Pour k ← 1 à n faire
            S ← S + 𝔸_{i,k} 𝔹_{k,j}
        Fin
        𝔾_{i,j} ← S
    Fin
Fin
```

On obtient alors en utilisant les notations algorithmiques

Algorithme 22 Fonction ProdMatMatFun retournant la matrice $\mathbb{G} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{A}\mathbb{B}$, produit de la matrice $\mathbb{A}$ par la matrice $\mathbb{B}$.

Données : $\mathbb{A}$: matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$,
$\mathbb{B}$: matrice de $\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{R})$.

Résultat : $\mathbb{G}$: matrice de $\mathcal{M}_{m,q}(\mathbb{R})$.

```
Fonction 𝔾v ← ProdMatMat( 𝔸, 𝔹 )
    Pour i ← 1 à m faire
        Pour j ← 1 à q faire
            S ← 0
            Pour k ← 1 à n faire
                S ← S + 𝔸(i,k) * 𝔹(k,j)
            Fin
            𝔾(i,j) ← S
        Fin
    Fin
Fin
```

Q. 5 *Sous les hypothèses trouvées en* **Q.4***, on note* $\mathbb{G} = \mathbb{A}\mathbb{B}$.

a. En utilisant les notations mathèmatiques d'accès aux lignes et colonnes d'une matrice, écrire $\mathbb{G}_{i,j}$ *comme un produit scalaire entre un vecteur ligne de* $\mathbb{A}$ *et un vecteur colonne de* $\mathbb{B}$.

b. Ecrire la fonction ProdMatMatFun1 *permettant de retourner* $\mathbb{G}$ *en utilisant la formule trouvée en* **Q.5** a.*, des fonctions de la Table 3 (i.e. sans utiliser les instructions simplifiées) et la fonction* ProdSca.

c. Ecrire la fonction ProdMatMatSim1 *permettant de retourner* $\mathbb{G}$ *en utilisant la formule trouvée en* **Q.5** a.*, des instructions simplifiées de la Table 3 et la fonction* ProdSca.

□

R. 5 a. En effet la composante (i, j) de $\mathbb{G}$ est le produit scalaire de la ligne i de $\mathbb{A}$ et de la colonne j de $\mathbb{B}$. On a donc

$$\forall (i, j) \in [\![1, m]\!] \times [\![1, q]\!], \quad \mathbb{G}_{i,j} = \langle \mathbb{A}_{i,:}, \mathbb{B}_{:,j} \rangle .$$

b. Voici l'algorithme utilisant les notations mathématiques permettant d'accéder aux lignes et colonnes des matrices

Algorithme 23 $\boxed{\mathcal{R}_0}$

Pour $i \leftarrow 1$ **à** m **faire**
  Pour $j \leftarrow 1$ **à** q **faire**
    $\mathbb{G}_{i,j} \leftarrow \langle \mathbb{A}_{i,:}, \mathbb{B}_{:,j} \rangle$
  Fin
Fin

On obtient alors en utilisant les fonctions algorithmiques de la Table 3

Algorithme 23 Fonction ProdMatMatFun1 retournant la matrice $\mathbb{G} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{A}\mathbb{B}$, produit de la matrice $\mathbb{A}$ par la matrice $\mathbb{B}$.

Données : $\mathbb{A}$: matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$,
$\mathbb{B}$: matrice de $\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{R})$.
Résultat : $\mathbb{G}$: matrice de $\mathcal{M}_{m,q}(\mathbb{R})$.

Fonction $\mathbb{G}v \leftarrow$ ProdMatMatFun1($\mathbb{A}, \mathbb{B}$)
  Pour $i \leftarrow 1$ **à** m **faire**
    Pour $j \leftarrow 1$ **à** q **faire**
      $\mathbb{G}(i, j) \leftarrow$ ProSca(getMatRow($\mathbb{A}, i$), getMatCol($\mathbb{B}, j$))
    Fin
  Fin
Fin

c. En utilisant des instructions simplifiées de la Table 3 et la fonction ProdSca, on a

Algorithme 24 Fonction ProdMatMatSim1 retournant la matrice $\mathbb{G} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{A}\mathbb{B}$, produit de la matrice $\mathbb{A}$ par la matrice $\mathbb{B}$.

Données : $\mathbb{A}$: matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$,
$\mathbb{B}$: matrice de $\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{R})$.
Résultat : $\mathbb{G}$: matrice de $\mathcal{M}_{m,q}(\mathbb{R})$.

Fonction $\mathbb{G}v \leftarrow$ ProdMatMatFun1($\mathbb{A}, \mathbb{B}$)
  Pour $i \leftarrow 1$ **à** m **faire**
    Pour $j \leftarrow 1$ **à** q **faire**
      $\mathbb{G}(i,j) \leftarrow$ ProSca$\big(\mathbb{A}(i,:), \mathbb{B}(:,j)\big)$
    Fin
  Fin
Fin

Q. 6 *Sous les hypothèses trouvées en* **Q.4***, on note* $\mathbb{G} = \mathbb{A}\mathbb{B}$.

a. *En utilisant les notations mathèmatiques d'accès aux lignes et colonnes d'une matrice, écrire* $\mathbb{G}_{:,j}$ *(*j*-ème vecteur colonne de* $\mathbb{G}$*) comme le produit de la matrice* $\mathbb{A}$ *par un vecteur colonne de* $\mathbb{B}$.

b. *Ecrire la fonction* ProdMatMatFun2 *permettant de retourner* $\mathbb{G}$ *en utilisant la formule trouvée en* **Q.6** a.*, des fonctions de la Table 3 (i.e. sans utiliser les instructions simplifiées) et la fonction* ProdMatVecFun.

c. *Ecrire la fonction* ProdMatMatSim2 *permettant de retourner* $\mathbb{G}$ *en utilisant la formule trouvée en* **Q.6** a.*, des instructions simplifiées de la Table 3 et la fonction* ProdMatVecSim.

□

R. 6 a. En effet la colonne j de $\mathbb{G}$ correspond au produit de la matrice $\mathbb{A}$ par la colonne j de $\mathbb{B}$. On a donc

$$\forall j \in [\![1, q]\!], \quad \mathbb{G}_{:,j} = \mathbb{A}\mathbb{B}_{:,j}.$$

b. Voici l'algorithme utilisant les notations mathématiques permettant d'accéder aux lignes et colonnes des matrices

Algorithme 25 $\boxed{\mathcal{R}_0}$

Pour $j \leftarrow 1$ **à** q **faire**
  $\mathbb{G}_{:,j} \leftarrow \mathbb{A}_{i,:}\mathbb{B}_{:,j}$
Fin

On obtient alors en utilisant les fonctions algorithmiques de la Table 3

Algorithme 25 Fonction ProdMatMatFun2 retournant la matrice $\mathbb{G} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{A}\mathbb{B}$, produit de la matrice $\mathbb{A}$ par la matrice $\mathbb{B}$.

Données : $\mathbb{A}$: matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$,
$\mathbb{B}$: matrice de $\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{R})$.
Résultat : $\mathbb{G}$: matrice de $\mathcal{M}_{m,q}(\mathbb{R})$.

Fonction $\mathbb{G} \leftarrow$ ProdMatMatFun2($\mathbb{A}, \mathbb{B}$)
  Pour $j \leftarrow 1$ **à** q **faire**
    $\mathbb{G}(:,j) \leftarrow$ ProdMatVecFun$\big(\mathbb{A}$, getMatCol$(\mathbb{B}, j)\big)$
  Fin
Fin

c. En utilisant les notations algorithmiques simplifiées et la fonction ProdMatVecSim déjà écrite, on a

---

Algorithme 26 Fonction ProdMatMatSim2 retournant la matrice $\mathbb{G} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{A}\mathbb{B}$, produit de la matrice $\mathbb{A}$ par la matrice $\mathbb{B}$.

Données :	$\mathbb{A}$	:	matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$,
	$\mathbb{B}$	:	matrice de $\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{R})$.
Résultat :	$\mathbb{G}$	:	matrice de $\mathcal{M}_{m,q}(\mathbb{R})$.

Fonction $\mathbb{G} \leftarrow$ ProdMatMatSim2($\mathbb{A}, \mathbb{B}$)
    Pour $j \leftarrow 1$ **à** q **faire**
        $\mathbb{G}(:, j) \leftarrow$ ProdMatVecSim$\big(\mathbb{A}, \mathbb{B}(:, j)\big)$
    Fin
Fin
