Energétique 1ère année
Sup'Galilée

Méthodes Numériques
Année 2024-2025

Examen du 8 avril 2025

durée : 2h30.

Sans documents, sans appareils électroniques, ...

Le barême est donné à titre indicatif

Exercice 1 : E.D.O. (10 points)

0.25 pts **Q. 1** ***a.*** *Que signifie l'abréviation E.D.O.?*

0.5 pts ***b.*** *Donner la définition détaillée d'un problème de Cauchy* ***vectoriel****.*

0.25 pts ***c.*** *Quelles sont les données d'un problème de Cauchy* ***vectoriel****?*

0.25 pts ***d.*** *Que cherche-t'on?*

□ Q.1 1.25 pts

0.5 pts **Q. 2 [Algo.]** *Ecrire une fonction algorithmique* DisReg *permettant d'obtenir une discrétisation régulière de l'intervalle* $[a, b]$*, avec* $a < b$*, en* $(N + 1)$ *points.* □ Q.2 0.50 pts

On souhaite résoudre numériquement un problème de Cauchy par un schéma explicite à un pas (constant) du type

$$\boldsymbol{y}^{[n+1]} = \boldsymbol{y}^{[n]} + h\boldsymbol{\Phi}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]}, h). \tag{1.1}$$

La fonction $\boldsymbol{\Phi}$ associée à une méthode de Runge-Kutta à q évaluations de $\boldsymbol{f}$ (fonction associée au problème de Cauchy) peut s'écrire sous la forme :

$$\boldsymbol{\Phi}(t, \boldsymbol{y}, h) = \sum_{i=1}^{q} c_i \boldsymbol{k}^{[i]}(t, \boldsymbol{y}, h)$$

avec

$$\boldsymbol{k}^{[i]}(t, \boldsymbol{y}, h) = \boldsymbol{f}\left(t + ha_i, y + h\sum_{j=1}^{q} b_{i,j}\boldsymbol{k}^{[j]}(t, \boldsymbol{y}, h)\right), \ 1 \leqslant i \leqslant q$$

que l'on peut représenter sous la forme d'un tableau dit **tableau de Butcher** :

$$\begin{array}{c|c} \boldsymbol{a} & \mathbb{B} \\ \hline & \boldsymbol{c}^t \end{array} \tag{1.2}$$

avec $\mathbb{B} = (b_{i,j})_{i,j\in[\![1,q]\!]} \in \mathcal{M}_{q,q}(\mathbb{R})$, $\boldsymbol{a} = (a_i)_{i\in[\![1,q]\!]} \in \mathbb{R}^q$ et $\boldsymbol{c} = (c_i)_{i\in[\![1,q]\!]} \in \mathbb{R}^q$.
On prend pour tableau de Butcher:

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{13}{7} & \frac{20}{7} & 0 \\ \hline & -\frac{1}{3} & \frac{25}{24} & \frac{7}{24} \end{array} \tag{1.3}$$

1.5 pts **Q. 3** *Ecrire explicitement et en détail le schéma de Runge-Kutta associé au tableau de Butcher (1.3).* Q.3 1.50 pts

□

Un autre schéma de Runge-Kutta d'ordre 3 pour la résolution d'un problème de Cauchy vectoriel est donné par

$$\left\{\begin{array}{lll} \boldsymbol{y}^{[n+1]} & = & \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{1}{36}\,h(8\,\boldsymbol{k}_1 + 25\,\boldsymbol{k}_2 + 3\,\boldsymbol{k}_3) \\ \text{avec} & & \boldsymbol{k}_1 = \boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]}), \\ & & \boldsymbol{k}_2 = \boldsymbol{f}(\frac{3}{5}\,h + t^n, \frac{3}{5}\,h\boldsymbol{k}_1 + \boldsymbol{y}^{[n]}), \\ & & \boldsymbol{k}_3 = \boldsymbol{f}(h + t^n, -\frac{1}{3}\,h(7\,\boldsymbol{k}_1 - 10\,\boldsymbol{k}_2) + \boldsymbol{y}^{[n]}), \\ \boldsymbol{y}^{[0]} & & \text{donné.} \end{array}\right. \tag{1.4}$$

1.5 PTS **Q. 4 [Algo.]** *Ecrire la fonction algorithmique* RedRK3 *permettant de résoudre un problème de Cauchy vectoriel par le schéma* (1.4). □ Q.4 1.50 PTS

Pour résoudre numériquement un problème de Cauchy, différentes méthodes peuvent être utilisées. Dans le reste de l'exercice, nous allons utiliser un schéma explicite, à **pas multiples**, et d'ordre 3 donné par

$$\boldsymbol{y}^{[n+1]} = \boldsymbol{y}^{[n]} + h\left(\frac{23}{12}\boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]}) - \frac{4}{3}\boldsymbol{f}(t^{n-1}, \boldsymbol{y}^{[n-1]}) + \frac{5}{12}\boldsymbol{f}(t^{n-2}, \boldsymbol{y}^{[n-2]})\right) \tag{1.5}$$

1.5 PTS **Q. 5** *Expliquez en détail comment résoudre un problème de Cauchy vectoriel par le schéma* (1.5). *Un soin particulier sera apporté à l'«initialisation».* □ Q.5 1.50 PTS

1.5 PTS **Q. 6 [Algo.]** *Ecrire la fonction algorithmique* RedPM3 *permettant de résoudre un problème de Cauchy (vectoriel) par le schéma* (1.5). □ Q.6 1.50 PTS

Application: Soit le système d'E.D.O. suivant

$$\forall t \in [0, 10], \quad \left\{\begin{array}{ll} \ddot{x}_1(t) - 4(\ddot{x}_2(t) - \ddot{x}_1(t)) + 2\dot{x}_1(t) - 2x_2(t) & = \sin(t), \qquad (1.6a) \\ \ddot{x}_2(t) - 5(\ddot{x}_1(t) - \ddot{x}_2(t)) + 3\dot{x}_2(t) - x_1(t) & = \cos(t) \qquad (1.6b) \end{array}\right.$$

On veut résoudre ce système d'E.D.O. avec pour données initiales $x_1(0) = 0$, $\dot{x}_1(0) = 1$, $\ddot{x}_1(0) = 2$, $x_2(0) = -1/2$, $\dot{x}_2(0) = -1$, $\ddot{x}_2(0) = 3$.

1.5 PTS **Q. 7** *Ecrire le problème précédent sous la forme d'un problème de Cauchy.* □ Q.7 1.50 PTS

1 PTS **Q. 8 [Algo.]** *Ecrire un algorithme complet permettant de résoudre* (1.6a)-(1.6b) *avec les données initiales spécifiées. Ce programme devra aussi représenter les approximations des fonctions x_1 et x_2. On utilisera pour celà la fonction* Plot(X, Y) *qui relie les points* $(X(i), Y(i))$ *contenus dans les deux tableaux de même taille X et Y (fonction similaire à la fonction* `plot` *de Matlab).* □ Q.8 1.00 PTS

EXO. 1 10.25 PTS

EXERCICE 2 : E.D.P. (10 points)

1.0 PTS **Q. 1 [Algo.]** *Ecrire la fonction* CreMat *retournant la matrice* $\mathbb{M} \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ *définie par*

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ p_1 & q_1 & r_1 & 0 & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & 0 & p_{d-2} & q_{d-2} & r_{d-2} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & e_1 & e_2 & e_3 \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

où $(p_i)_{i=1}^{d-2}$, $(q_i)_{i=1}^{d-2}$, $(r_i)_{i=1}^{d-2}$, e_1, e_2, e_3, f_1, f_2 *et* f_3 *sont des réels donnés.* □ Q.1 1.00 PTS

Soit l'E.D.P. suivante

$$-u''(x) + c(x)u(x) = f(x), \ \forall x \in]a; b[, \tag{2.2}$$
$$u(a) = \alpha, \tag{2.3}$$
$$u'(b) + \nu u(b) = \beta. \tag{2.4}$$

où $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\nu \in \mathbb{R}^+$, $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et c est une fonction strictement positive.

0.25 PTS **Q. 2** ***a.*** *Que signifie l'abréviation E.D.P.?*

b. *Quelles sont les données du problème (2.2) à (2.4)? (préciser le type de chaque donnée : réel, entier, fonction, vecteur, ...)* 0.5 PTS

0.25 PTS ***c.*** *Quelles sont les inconnues du problème (2.2) à (2.4)? (préciser le type)*

0.25 PTS ***d.*** *Quelles sont les conditions initiales?*

0.25 PTS ***e.*** *Quelles sont les conditions aux limites?*

☐ Q.2 1.50 PTS

On note x_i, $i \in [\![0, N]\!]$ la discrétisation régulière de $[a; b]$ avec N pas de discrétisation. On souhaite résoudre l'E.D.P. (2.2) à (2.4) à l'aide des schémas numériques

$$-\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + c_i u_i = f_i, \tag{2.5}$$
$$(3 + 2\nu h)u_N - 4u_{N-1} + u_{N-2} = 2h\beta. \tag{2.6}$$

Q. 3 ***a.*** *Expliquer en détail comment le schéma (2.5) a été obtenu à partir de (2.2) et préciser ce que représentent les termes u_i, f_i, c_i et h?* 1.5 PTS

1.0 PTS ***b.*** *Expliquer en détail comment le schéma (2.6) a été obtenu à partir de (2.4).*

c. *Donner une discrétisation détaillée du problème (2.2) à (2.4) en utilisant les schémas (2.5) et (2.6).* 0.25 PTS

0.25 PTS ***d.*** *Le schéma global est de quel ordre? Justifiez.*

☐ Q.3 3.00 PTS

On note $\boldsymbol{V}$ le vecteur de dimension $(N + 1)$, de composantes $\boldsymbol{V}_i = u_{i-1}$, $\forall i \in [\![1, N + 1]\!]$.

Q. 4 *Montrer, de manière détaillée, que le vecteur $\boldsymbol{V}$ est solution d'un système linéaire*

$$\mathbb{A}\boldsymbol{V} = \boldsymbol{F} \tag{2.7}$$

2.0 PTS *en explicitant la matrice $\mathbb{A}$ et le vecteur $\boldsymbol{F}$ (préciser les dimensions).* ☐ Q.4 2.00 PTS

Pour résoudre un système linéaire $\mathbb{M}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ avec $\mathbb{M} \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ inversible et $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^d$ donnés, on dispose de la commande

$$\boldsymbol{x} \leftarrow \text{Solve}(\mathbb{M}, \boldsymbol{b}).$$

Q. 5 [Algo.] *Ecrire la fonction algorithmique* resEDP *permettant de résoudre le problème (2.2) à (2.4) en utilisant les schémas (2.5) et (2.6), ainsi que la fonction* CreMat *de **Q. 1**. Cette fonction devra retourner* 1.5 PTS *la discrétisation $(x_i)_{i=0}^N$ de l'intervalle $[a, b]$ avec N pas de discrétisation et l'ensemble des $(u_i)_{i=0}^N$.* ☐ Q.5 1.50 PTS

Q. 6 [Algo.] *Ecrire un algorithme complet de résolution du problème (2.2) à (2.4) utilisant la fonction* resEDP *dont les données seront choisies pour avoir comme solution exacte $u(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sin(x^2)$. On représentera l'erreur commise entre la solution exacte et la solution numérique calculée. Pour celà, on utilisera la fonction* Plot*(X, Y) qui relie les points $(X(i), Y(i))$ contenus dans les deux tableaux de même taille X et* 1.0 PTS *Y (fonction similaire à la fonction* `plot` *de Matlab).* ☐ Q.6 1.00 PTS

Exo. 2 10.00 PTS