Méthodes Numériques II
Chapitre 3: Equations Différentielles Ordinaires
Exercices - épisode 2
version du 2026/04/01 à 17:56:01

Exercice 1

la **méthode de Heun** est donnée par

$$\boldsymbol{y}^{[n+1]} = \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{h}{2}\boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]}) + \frac{h}{2}\boldsymbol{f}\left(t^{n+1}, \boldsymbol{y}^{[n]} + h\boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]})\right).$$

Q. 1 *Ecrire la fonction algorithmique* REDHeunVec *permettant de résoudre un problème de Cauchy vectoriel par la méthode de Heun en utilisant au plus* $2N$ *évaluation de* $\boldsymbol{f}$. □

Q. 2 *Ecrire un programme algorithmique permettant de retrouver numériquement l'ordre de cette méthode.* □

Exercice 2

la **méthode de Runge-Kutta d'ordre 4** est donnée par

$$\begin{array}{lcl}
\boldsymbol{k}_1^{[n]} & = & \boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]}) \\
\boldsymbol{k}_2^{[n]} & = & \boldsymbol{f}(t^n + \frac{h}{2}, \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{h}{2}\boldsymbol{k}_1^{[n]}) \\
\boldsymbol{k}_3^{[n]} & = & \boldsymbol{f}(t^n + \frac{h}{2}, \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{h}{2}\boldsymbol{k}_2^{[n]}) \\
\boldsymbol{k}_4^{[n]} & = & \boldsymbol{f}(t^n + h, \boldsymbol{y}^{[n]} + h\boldsymbol{k}_3^{[n]}) \\
\hline
\boldsymbol{y}^{[n+1]} & = & \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{h}{6}(\boldsymbol{k}_1^{[n]} + 2\boldsymbol{k}_2^{[n]} + 2\boldsymbol{k}_3^{[n]} + \boldsymbol{k}_4^{[n]}).
\end{array}$$

Q. 1 *Ecrire une fonction algorithmique* REDRK4Vec *permettant de résoudre un problème de Cauchy vectoriel par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4.* □

Q. 2 *Ecrire un programme algorithmique permettant de retrouver numériquement l'ordre de cette méthode.* □

Exercice 3

La **méthode de Adam-Bashforth d'ordre 4** explicite est donnée par

$$\boldsymbol{y}^{[n+1]} = \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{h}{24}\left(55\boldsymbol{f}^{[n]} - 59\boldsymbol{f}^{[n-1]} + 37\boldsymbol{f}^{[n-2]} - 9\boldsymbol{f}^{[n-3]}\right). \qquad (3.1)$$

avec $\boldsymbol{f}^{[n]} = \boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]})$.

Q. 1 *Ecrire la fonction algorithmique REDAB4Vec permettant de résoudre un problème de Cauchy vectoriel par cette méthode.* □

Exercice 4

On pose $\boldsymbol{f}^{[n]} = \boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]})$. La **méthode de Adams-Bashforth d'ordre 4** explicite est donnée par

$$\boldsymbol{y}^{[n+1]} = \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{h}{24}\left(55\boldsymbol{f}^{[n]} - 59\boldsymbol{f}^{[n-1]} + 37\boldsymbol{f}^{[n-2]} - 9\boldsymbol{f}^{[n-3]}\right)$$

et la **méthode de Adams-Moulton d'ordre 4** implicite par

$$\boldsymbol{y}^{[n+1]} = \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{h}{24}\left(9\boldsymbol{f}^{[n+1]} + 19\boldsymbol{f}^{[n]} - 5\boldsymbol{f}^{[n-1]} + \boldsymbol{f}^{[n-2]}\right)$$

avec $\boldsymbol{f}^{[n]} = \boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]})$.

Q. 1 *Ecrire la fonction algorithmique* REDPC4Vec *permettant de résoudre un problème de Cauchy (vectoriel) par une méthode de prédiction-correction utilisant ces deux schémas. On minimisera le nombre d'appel à la fonction* $\boldsymbol{f}$ *dans la boucle principale.* □

Exercice 5 : Examen du 4 avril 2023, partie E.D.O.

Q. 1 *a. Que signifie l'abréviation E.D.O.?*

b. Donner la définition détaillée d'un problème de Cauchy ***vectoriel****.*

c. Quelles sont les données d'un problème de Cauchy ***vectoriel****?*

d. Que cherche-t'on?

□

Q. 2 *Ecrire une fonction algorithmique* `DisReg` *permettant de d'obtenir une discrétisation régulière de l'intervalle* $[a, b]$ $(a < b)$ *en* $n + 1$ *points.* □

On souhaite résoudre numériquement un problème de Cauchy par un schéma explicite à un pas (constant) du type

$$\boldsymbol{y}^{[n+1]} = \boldsymbol{y}^{[n]} + h\boldsymbol{\Phi}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]}, h). \tag{5.2}$$

La fonction $\boldsymbol{\Phi}$ associée à une méthode de Runge-Kutta à q évaluations de $\boldsymbol{f}$ (fonction associée au problème de Cauchy) peut s'écrire sous la forme :

$$\boldsymbol{\Phi}(t, \boldsymbol{y}, h) = \sum_{i=1}^{q} c_i \boldsymbol{k}^{[i]}(t, \boldsymbol{y}, h)$$

avec

$$\boldsymbol{k}^{[i]}(t, \boldsymbol{y}, h) = \boldsymbol{f}\left(t + ha_i, y + h\sum_{j=1}^{q} b_{i,j}\boldsymbol{k}^{[j]}(t, \boldsymbol{y}, h)\right),\ 1 \leqslant i \leqslant q$$

que l'on peut représenter sous la forme d'un tableau dit **tableau de Butcher** :

$$\begin{array}{c|c} \boldsymbol{a} & \mathbb{B} \\ \hline & \boldsymbol{c}^t \end{array} \tag{5.3}$$

avec $\mathbb{B} = (b_{i,j})_{i,j\in[\![1,q]\!]} \in \mathcal{M}_{q,q}(\mathbb{R})$, $\boldsymbol{a} = (a_i)_{i\in[\![1,q]\!]} \in \mathbb{R}^q$ et $\boldsymbol{c} = (c_i)_{i\in[\![1,q]\!]} \in \mathbb{R}^q$.
On prend pour tableau de Butcher:

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{13}{7} & \frac{20}{7} & 0 \\ \hline & -\frac{1}{3} & \frac{25}{24} & \frac{7}{24} \end{array} \tag{5.4}$$

Q. 3 *Ecrire explicitement et en détail le schéma de Runge-Kutta associé au tableau de Butcher (5.4).*
□

Un autre schéma de Runge-Kutta d'ordre 3 pour la résolution d'un problème de Cauchy vectoriel est donné par

$$\left\{\begin{array}{lcl} \boldsymbol{y}^{[n+1]} & = & \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{1}{36}\,h(3\,\boldsymbol{k}_1 + 25\,\boldsymbol{k}_2 + 8\,\boldsymbol{k}_3) \\ \text{avec} & & \boldsymbol{k}_1 = \boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]}), \\ & & \boldsymbol{k}_2 = \boldsymbol{f}(t^n + \frac{2}{5}\,h, \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{2}{5}\,h\boldsymbol{k}_1), \\ & & \boldsymbol{k}_3 = \boldsymbol{f}(t^n + h, \boldsymbol{y}^{[n]} + h(-\frac{7}{8}\,\boldsymbol{k}_1 + \frac{15}{8}\,\boldsymbol{k}_2)), \\ \boldsymbol{y}^{[0]} & & \text{donné.} \end{array}\right. \tag{5.5}$$

Q. 4 *[Algorithmique] Ecrire la fonction algorithmique* REDRK3Vec *permettant de résoudre un problème de Cauchy vectoriel par le schéma* (5.5). □

Un schéma explicite, à **pas multiples**, et d'ordre 3 est donné par

$$\boldsymbol{y}^{[n+1]} = \boldsymbol{y}^{[n]} + h\left(\frac{23}{12}\boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]}) - \frac{4}{3}\boldsymbol{f}(t^{n-1}, \boldsymbol{y}^{[n-1]}) + \frac{5}{12}\boldsymbol{f}(t^{n-2}, \boldsymbol{y}^{[n-2]})\right) \tag{5.6}$$

Q. 5 *Expliquez en détail comment résoudre un problème de Cauchy vectoriel par le schéma* (5.6). *Un soin particulier sera apporté à l'«initialisation».* □

Q. 6 *[Algorithmique] Ecrire la fonction algorithmique* RedPM3 *permettant de résoudre un problème de Cauchy (vectoriel) par le schéma* (5.6). □

Application: Soit le système d'E.D.O. suivant

$$\left\{\begin{array}{ll} \ddot{x}_1(t) - \nu_1(\dot{x}_2(t) - \dot{x}_1(t)) + x_2(t) & = \cos(t) \qquad (5.7a) \\ \ddot{x}_2(t) - \nu_2(\dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t)) + x_1(t) & = \sin(t) \qquad (5.7b) \end{array}\right.$$

On veut résoudre numériquement ce système d'E.D.O. avec pour données initiales $x_1(0) = 1$, $\dot{x}_1(0) = 0$, $x_2(0) = -1$, $\dot{x}_2(0) = 1/2$. Le temps final T sera égal à 10.

Q. 7 *Ecrire le problème précédent sous la forme d'un problème de Cauchy.* □

Q. 8 *[Algorithmique] Ecrire un algorithme complet permettant de résoudre* (5.7a)-(5.7b)*avec les données initiales spécifiées. On prendra $\nu_1 = 1/4$ et $\nu_2 = 1/3$. Ce programme devra aussi représenter les approximations des fonctions x_1 et x_2.On utilisera pour celà la fonction* Plot(X, Y) *qui relie les points $(X(i), Y(i))$ contenus dans les deux tableaux de même taille X et Y (function similaire à la fonction* `plot` *de Matlab).* □