Energétique 1ère année **Méthodes Numériques**
Sup'Galilée **Année 2024-2025**

EXAMEN DU 2 SEPTEMBRE 2025
durée : 1h30.

Sans documents, sans appareils électroniques, ...
Le barème est donné à titre indicatif

EXERCICE 1 : E.D.O. (10 points)

De manière général, pour résoudre un problème de Cauchy vectoriel par une méthode de type Runge-Kutta, on utilise le schéma explicite à un pas (constant) suivant

$$\boldsymbol{y}^{[n+1]} = \boldsymbol{y}^{[n]} + h\boldsymbol{\Phi}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]}, h). \tag{1.1}$$

La fonction $\boldsymbol{\Phi}$ associée à une méthode de Runge-Kutta à q évaluations de $\boldsymbol{f}$ (fonction associée au problème de Cauchy vectoriel à résoudre) peut s'écrire sous la forme :

$$\boldsymbol{\Phi}(t, \boldsymbol{y}, h) = \sum_{i=1}^{q} c_i \boldsymbol{k}^{[i]}(t, \boldsymbol{y}, h)$$

avec

$$\boldsymbol{k}^{[i]}(t, \boldsymbol{y}, h) = \boldsymbol{f}\left(t + ha_i, y + h\sum_{j=1}^{q} b_{i,j}\boldsymbol{k}^{[j]}(t, \boldsymbol{y}, h)\right), \; 1 \leqslant i \leqslant q$$

que l'on peut représenter sous la forme d'un tableau dit **tableau de Butcher** :

$$\begin{array}{c|c} \boldsymbol{a} & \mathbb{B} \\ \hline & \boldsymbol{c}^t \end{array} \tag{1.2}$$

avec $\mathbb{B} = (b_{i,j})_{i,j \in [\![1,q]\!]} \in \mathcal{M}_{q,q}(\mathbb{R})$, $\boldsymbol{a} = (a_i)_{i \in [\![1,q]\!]} \in \mathbb{R}^q$ et $\boldsymbol{c} = (c_i)_{i \in [\![1,q]\!]} \in \mathbb{R}^q$.
On prend pour tableau de Butcher:

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 1 & \frac{7}{3} & -\frac{4}{3} & 0 \\ \hline & \frac{5}{18} & \frac{8}{9} & -\frac{1}{6} \end{array} \tag{1.3}$$

Q. 1 *Ecrire explicitement et en détail le schéma de Runge-Kutta associé au tableau de Butcher (1.3).* □

On suppose la fonction algorithmique RedRK3 permettant de résoudre un problème de Cauchy vectoriel par le schéma associé au tableau de Butcher (1.3) déjà implémentée (et donc inutile de l'écrire!) avec les paramètres d'entrées/sorties vus en cours.

$$[t, Y] = \text{RedRK3}(f, t_0, T, y_0, N)$$

Pour résoudre numériquement un problème de Cauchy vectoriel, différentes méthodes peuvent être utilisées. Dans le reste de l'exercice, nous allons utiliser un schéma explicite, à **pas multiples**, et d'ordre 3 donné par

$$\boldsymbol{y}^{[n+1]} = \boldsymbol{y}^{[n]} + h\left(\frac{23}{12}\boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]}) - \frac{4}{3}\boldsymbol{f}(t^{n-1}, \boldsymbol{y}^{[n-1]}) + \frac{5}{12}\boldsymbol{f}(t^{n-2}, \boldsymbol{y}^{[n-2]})\right) \tag{1.4}$$

Q. 2 *Expliquez, de manière très détaillée, comment résoudre un problème de Cauchy vectoriel par le schéma* (1.4). □

Q. 3 [Algo.] *Ecrire la fonction algorithmique* RedPM3 *permettant de résoudre un problème de Cauchy (vectoriel) par le schéma* (1.4). □

Application: Soit le système d'E.D.O. suivant

$$\forall t \in [0, 10], \quad \begin{cases} \ddot{x}_1(t) - 3(\ddot{x}_2(t) - \ddot{x}_1(t)) + 4\dot{x}_1(t) - x_2(t) & = \sin(t), \quad (1.5a) \\ \ddot{x}_2(t) - 2(\ddot{x}_1(t) + \ddot{x}_2(t)) + 5\dot{x}_2(t) - 2x_1(t) & = \cos(t) \quad (1.5b) \end{cases}$$

On veut résoudre ce système d'E.D.O. avec pour données initiales $x_1(0) = 0$, $\dot{x}_1(0) = -1$, $\ddot{x}_1(0) = -2$, $x_2(0) = 1/2$, $\dot{x}_2(0) = 1/3$, $\ddot{x}_2(0) = 1/4$.

Q. 4 *Ecrire le système d'E.D.O.* (1.5a)-(1.5b) *sous la forme d'un problème de Cauchy.* □

Q. 5 [Algo.] *Ecrire un algorithme complet permettant de résoudre* (1.5a)-(1.5b) *avec les données initiales spécifiées. Ce programme devra aussi représenter les approximations des fonctions x_1 et x_2. On utilisera pour celà la fonction* Plot(X, Y) *qui relie les points $(X(i), Y(i))$ contenus dans les deux tableaux de même taille X et Y (fonction similaire à la fonction* `plot` *de Matlab).* □

Exercice 2 : E.D.P. (10 points)

Soit l'E.D.P. suivante

$$\begin{aligned} -u''(x) + \nu(x)u(x) &= g(x), \ \forall x \in]a; b[, && (2.1) \\ u(a) &= \alpha, && (2.2) \\ u'(b) + 3u(b) &= \beta. && (2.3) \end{aligned}$$

où $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$, $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et ν est une fonction strictement positive.

Q. 1 **a.** *Que signifie l'abréviation E.D.P.?*

b. *Quelles sont les données du problème* (2.1) *à* (2.3)*? (préciser le type de chaque donnée : réel, entier, fonction, vecteur, ...)*

c. *Quelles sont les inconnues du problème* (2.1) *à* (2.3)*? (préciser le type)*

d. *Quelles sont les conditions initiales?*

e. *Quelles sont les conditions aux limites?*

□

On note x_i, $i \in [\![0, N]\!]$ la discrétisation régulière de $[a; b]$ avec N pas de discrétisation. On souhaite résoudre l'E.D.P. (2.1) à (2.3) à l'aide des schémas numériques

$$\begin{aligned} -u_{i+1} + (2 + h^2\nu_i)u_i - u_{i-1} &= h^2 g_i, && (2.4) \\ (1 + 3h)u_N - u_{N-1} &= h\beta. && (2.5) \end{aligned}$$

Q. 2 **a.** *Expliquer en détail comment le schéma* (2.4) *a été obtenu à partir de* (2.1) *et préciser ce que représentent les termes u_i, g_i, ν_i et h?*

b. *Expliquer en détail comment le schéma* (2.5) *a été obtenu à partir de* (2.3).

c. *Donner une discrétisation détaillée du problème* (2.1) *à* (2.3) *en utilisant, entre autres, les schémas* (2.4) *et* (2.5).

d. *Le schéma global est de quel ordre? Justifiez.*

□

On note $\boldsymbol{V}$ le vecteur de dimension $N + 1$, de composantes $\boldsymbol{V}_i = u_{i-1}$, $\forall i \in [\![1, N + 1]\!]$.

Q. 3 *Montrer que le vecteur $\boldsymbol{V}$ est solution d'un système linéaire*

$$\mathbb{A}\boldsymbol{V} = \boldsymbol{F} \quad (2.6)$$

en explicitant la matrice $\mathbb{A}$ et le vecteur $\boldsymbol{F}$ (préciser les dimensions). □