TRAVAUX DIRIGÉS - 2

1 Polynôme d'interpolation de Lagrange

EXERCICE 1

Ecrire la fonction LAGRANGE permettant de calculer $\mathcal{P}_n$ (polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux $n+1$ points $(x_i, y_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$) au point $x \in \mathbb{R}$.

EXERCICE 2

Soit $\mathcal{P}_n$ le polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux $n+1$ points $(x_i, y_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ et $\boldsymbol{X}$ un vecteur de $\mathbb{R}^m$.

1. Ecrire la fonction LAGRANGEVEC permettant de calculer le vecteur $\boldsymbol{Y} \in \mathbb{R}^m$ tel que

$$Y_i = \mathcal{P}_n(X_i),\ \forall i \in [\![1, m]\!].$$

2. Evaluer le coût arithmétique de la fonction LAGRANGEVEC en fonction de n et m.

EXERCICE 3

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$. On note $\boldsymbol{X} = (X_1, \dots, X_{n+1})$ la dicrétisation régulière de l'intervalle $[a,b]$ avec $n+1$ points et $\boldsymbol{Y} \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $Y_i = f(X_i),\ \forall i \in [\![1, n+1]\!]$.

Ecrire un programme permettant de représenter graphiquement f et $\mathcal{P}_n$ (polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux $n+1$ points $(X_i, Y_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$) sur l'intervalle $[a,b]$.

On utilisera pour celà la fonction PLOT dont la syntaxe est `PLOT(x,y)` où `x` et `y` sont des vecteurs de $\mathbb{R}^k$. Cette fonction relie successivement les points `(x(j),y(j))`, pour j allant de 1 à k, par des segments.

2 Dérivation numérique

EXERCICE 4

On note $x_i = a + ih$, $i \in [\![0, n]\!]$, une discrétisation régulière de l'intervalle $[a,b]$. Soit une fonction $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ suffisament régulière. On suppose que les y_i sont donnés par

$$y_i = f(x_i),\quad \forall i \in [\![0, n]\!]. \tag{4.1}$$

Ecrire une fonction DERIVE1 permettant de calculer des approximations d'ordre 1 de $f'(x_i)$ pour $i \in [\![0, n]\!]$.

EXERCICE 5

On note $x_i = a + ih$, $i \in [\![0, n]\!]$, une discrétisation régulière de l'intervalle $[a,b]$. Soit une fonction $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ suffisament régulière. On suppose que les y_i sont donnés par

$$y_i = f(x_i),\quad \forall i \in [\![0, n]\!]. \tag{5.1}$$

Ecrire une fonction DERIVE2 permettant de calculer des approximations d'ordre 2 de $f'(x_i)$ pour $i \in [\![0, n]\!]$.

EXERCICE 6

Pour les points x_i, $i \in [\![1, n-1]\!]$, on utilise la formule des différences finies centrées. Cette dernière n'est pas utilisable pour $i = 0$ et $i = n$. Il faut donc trouver d'autres formules d'ordre 2.

- En $\bar{x} = x_0$, on développe les formules de Taylor de $f(\bar{x}+h)$ et $f(\bar{x}+2h)$ jusqu'au troisième ordre : $\exists \xi_1 \in]\bar{x}, \bar{x}+h[$, $\exists \xi_1 \in]\bar{x}, \bar{x}+2h[$,.

$$\begin{aligned} f(\bar{x}+h) &= f(\bar{x}) + hf'(\bar{x}) + \frac{h^2}{2} f^{(2)}(\bar{x}) + \frac{h^3}{3!} f^{(3)}(\xi_1) \\ f(\bar{x}+2h) &= f(\bar{x}) + 2hf'(\bar{x}) + \frac{(2h)^2}{2} f^{(2)}(\bar{x}) + \frac{(2h)^3}{3!} f^{(3)}(\xi_2) \end{aligned}$$

ce qui donne

$$f'(\bar{x}) + \frac{h}{2} f^{(2)}(\bar{x}) + \frac{h^2}{6} f^{(3)}(\xi_1) = \frac{f(\bar{x}+h) - f(\bar{x})}{h} \tag{6.1}$$

$$f'(\bar{x}) + hf^{(2)}(\bar{x}) + \frac{(2h)^2}{3!} f^{(3)}(\xi_2) = \frac{f(\bar{x}+2h) - f(\bar{x})}{2h} \tag{6.2}$$

On effectue la combinaison linéaire 2(6.1)-(6.2) pour éliminer le terme en h^1 et on obtient

$$\begin{aligned} f'(\bar{x}) + 2\frac{h^2}{6} f^{(3)}(\xi_1) - \frac{(2h)^2}{3!} f^{(3)}(\xi_2) &= 2\frac{f(\bar{x}+h) - f(\bar{x})}{h} - \frac{f(\bar{x}+2h) - f(\bar{x})}{2h} \\ &= -\frac{f(\bar{x}+2h) - 4f(\bar{x}+h) + 3f(\bar{x})}{2h} \end{aligned}$$

Une approximation à l'ordre 2 de $f'(\bar{x})$ utilisant les valeurs de f aux points $\{\bar{x}, \bar{x}+h, \bar{x}+2h\}$ est donnée par

$$f'(\bar{x}) = -\frac{f(\bar{x}+2h) - 4f(\bar{x}+h) + 3f(\bar{x})}{2h} + O(h^2). \tag{6.3}$$

- En $\bar{x} = x_n$, on développe les formules de Taylor de $f(\bar{x}-h)$ et $f(\bar{x}-2h)$ jusqu'au troisième ordre : $\exists \xi_1 \in]\bar{x}-h, \bar{x}[$, $\exists \xi_2 \in]\bar{x}-2h, \bar{x}[$,.

$$\begin{aligned} f(\bar{x}-h) &= f(\bar{x}) - hf'(\bar{x}) + \frac{h^2}{2} f^{(2)}(\bar{x}) - \frac{h^3}{3!} f^{(3)}(\xi_1) \\ f(\bar{x}-2h) &= f(\bar{x}) - 2hf'(\bar{x}) + \frac{(2h)^2}{2} f^{(2)}(\bar{x}) - \frac{(2h)^3}{3!} f^{(3)}(\xi_2) \end{aligned}$$

ce qui donne

$$f'(\bar{x}) - \frac{h}{2} f^{(2)}(\bar{x}) + \frac{h^2}{6} f^{(3)}(\xi_1) = \frac{f(\bar{x}) - f(\bar{x}-h)}{h} \tag{6.4}$$

$$f'(\bar{x}) - hf^{(2)}(\bar{x}) + \frac{(2h)^2}{3!} f^{(3)}(\xi_2) = \frac{f(\bar{x}) - f(x \bar{-} 2h)}{2h} \tag{6.5}$$

On effectue la combinaison linéaire 2(6.4)-(6.5) pour éliminer le terme en h^1 et on obtient

$$\begin{aligned} f'(\bar{x}) + 2\frac{h^2}{6} f^{(3)}(\xi_1) - \frac{(2h)^2}{3!} f^{(3)}(\xi_2) &= 2\frac{f(\bar{x}) - f(\bar{x}-h)}{h} - \frac{f(\bar{x}) - f(\bar{x}-2h)}{2h} \\ &= \frac{3f(\bar{x}) - 4f(\bar{x}-h) + f(\bar{x}-2h)}{2h} \end{aligned}$$

Une approximation à l'ordre 2 de $f'(\bar{x})$ utilisant les valeurs de f aux points $\{\bar{x}, \bar{x}-h, \bar{x}-2h\}$ est donnée par

$$f'(\bar{x}) = \frac{3f(\bar{x}) - 4f(\bar{x}-h) + f(\bar{x}-2h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2). \tag{6.6}$$

Exercice 7

On note $x_i = a+ih$, $i \in [\![0,n]\!]$, une discrétisation régulière de l'intervalle $[a,b]$. Soit une fonction $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ suffisament régulière. On suppose que les y_i sont donnés par

$$y_i = f(x_i), \quad \forall i \in [\![0,n]\!]. \tag{7.1}$$

Ecrire une fonction DeriveSeconde2 permettant de calculer des approximations d'ordre 2 de $f^{(2)}(x_i)$ pour $i \in [\![0,n]\!]$.