

Méthodes Numériques I ^a

Travaux Pratiques N° 2



Polynômes d'interpolation de Lagrange

a. Version du 7 janvier 2013

Table des matières

1	Rappels théoriques	2
2	Première approche matlab	2
3	Vectorisation	2
3.1	Un peu d'analyse numérique	3
3.2	Algorithme optimisé	3
4	Points de Tchebycheff	4
5	Annexe	4

1 Rappels théoriques

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_i, y_i)_{i \in [0, n]}$ avec $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$ et les x_i distincts deux à deux. Le **polynôme d'interpolation de Lagrange** associé aux $n + 1$ points $(x_i, y_i)_{i \in [0, n]}$, noté \mathcal{P}_n , est donné par

$$\mathcal{P}_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i L_i(x), \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

avec

$$\forall i \in [0, n], \quad L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Théorème 1 *Le polynôme d'interpolation de Lagrange, \mathcal{P}_n , associé aux $n + 1$ points $(x_i, y_i)_{i \in [0, n]}$, est l'unique polynôme de degré au plus n , vérifiant*

$$\mathcal{P}_n(x_i) = y_i, \quad \forall i \in [0, n]. \quad (3)$$

2 Première approche matlab

Exercice 1 (Matlab) *Ecrire la fonction LAGRANGE permettant de calculer \mathcal{P}_n (polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux $n + 1$ points $(x_i, y_i)_{i \in [0, n]}$) au point $x \in \mathbb{R}$ basée sur la formule (1).*

Exercice 2 (Matlab) *Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$. On note $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_{n+1})$ la discrétisation régulière de l'intervalle $[a, b]$ avec $n+1$ points et $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $Y_i = f(X_i)$, $\forall i \in [1, n+1]$.*

1. *Ecrire le programme prog1 permettant de représenter graphiquement le polynôme d'interpolation de Lagrange associé à (X, Y) et la fonction f sur l'intervalle $[\alpha, \beta]$.*

2. *Utiliser les jeux de données suivants :*

(a) $a = -1$, $b = 1$, $f : x \mapsto 1/(1 + 25x^2)$, $\alpha = -1$, $\beta = 1$ et faire varier $n = 5, 11, \dots$

(b) $a = 0$, $b = \pi$, $f : x \mapsto \cos(x)$, $\alpha = -1$, $\beta = 4$ et faire varier $n = 5, 20, 28, \dots$

(Voir Annexe, figures 1 et 2)

3 Vectorisation

Exercice 3 (Algorithme) *Soient \mathcal{P}_n le polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux $n + 1$ points $(x_i, y_i)_{i \in [0, n]}$ et \mathbf{X} un vecteur de \mathbb{R}^m .*

1. *Ecrire la fonction LAGRANGEVEC permettant de calculer le vecteur $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^m$ tel que*

$$Y_i = \mathcal{P}_n(X_i), \quad \forall i \in [1, m].$$

2. *Evaluer le coût arithmétique de la fonction LAGRANGEVEC en fonction de n et m .*

Exercice 4 (Matlab) *Transformer le programme prog1 de l'exercice 2 en un nouveau programme prog2 utilisant la fonction LAGRANGEVEC.*

3.1 Un peu d'analyse numérique

Dans cette partie, on va regarder la possibilité d'améliorer les performances, en terme de coût arithmétique, de la fonction `LAGRANGEVEC`.

Exercice 5 (Analyse numérique) 1. Soit v le polynôme de degré $n + 1$ défini par

$$v(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

Montrer que,

$$v'(x_i) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x_i - x_j), \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket. \quad (4)$$

2. Calculer $L_i(x)$ en fonction de $v(x)$ et $v'(x_i)$. En déduire que, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$,

$$\mathcal{P}_n(x) = v(x) \sum_{i=0}^n \frac{y_i}{(x - x_i)v'(x_i)}.$$

3. Démontrer que

$$\sum_{i=0}^n L_i(x) = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

En déduire que, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$,

$$\mathcal{P}_n(x) = \frac{\sum_{i=0}^n \frac{y_i}{(x - x_i)v'(x_i)}}{\sum_{i=0}^n \frac{1}{(x - x_i)v'(x_i)}}. \quad (5)$$

3.2 Algorithme optimisé

Exercice 6 (Algorithme) Soit \mathbf{X} un vecteur de \mathbb{R}^m .

1. Ecrire la fonction `LAGRANGEVECOPT` permettant de calculer le vecteur $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^m$ tel que

$$Y_i = \mathcal{P}_n(X_i), \quad \forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket$$

en utilisant au mieux¹ la formule (5).

2. Donner le coût arithmétique de la fonction `LAGRANGEVECOPT` en fonction de n et m .

Exercice 7 (Matlab) 1. Ecrire la fonction `LAGRANGEVECOPT` correspondant à l'exercice 6.

2. Ecrire un programme `prog3` similaire à `prog2` mais utilisant la fonction `LAGRANGEVECOPT`.

3. Comparer les programmes `prog2` et `prog3` avec m assez grand ($m = 4000$ par exemple) en utilisant l'outil Matlab `Profiler`. (Quelques captures d'écran sont fournies en Annexe : figures 3 et 4)

1. $v'(x_i)$ ne doit être calculé qu'une seule fois!

4 Points de Tchebycheff

Soient a et b deux réels, $a < b$ et $n \in \mathbb{N}$. Les $n + 1$ points de Tchebycheff de l'intervalle $[a, b]$ sont donnés par

$$x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos\left(\frac{(2i+1)\pi}{2(n+1)}\right), \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket. \quad (6)$$

Exercice 8 (Matlab) 1. Ecrire la fonction `TCHEBYCHEFF` permettant de calculer les $n + 1$ points de Tchebycheff de l'intervalle $[a, b]$.

2. Ecrire le programme `comparaison` permettant de comparer les polynômes de Lagrange avec points distribués uniformément et points de Tchebycheff. On peut prendre comme jeu de données $a = -1$, $b = 1$, $f : x \mapsto 1/(1 + 25x^2)$, $\alpha = -1$, $\beta = 1$ et $n = 11$. Des exemples de figures sont donnés en Annexe (figures 5 et 6).

5 Annexe

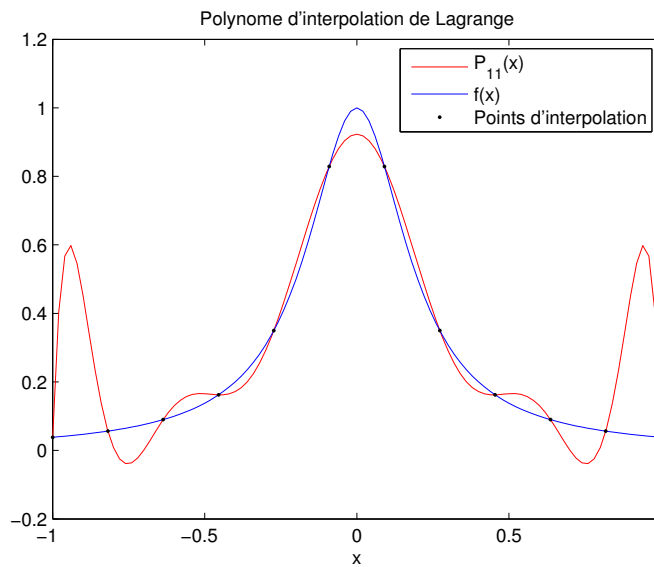


FIGURE 1: graphique obtenu à l'aide de `prog1` (exercice 2)

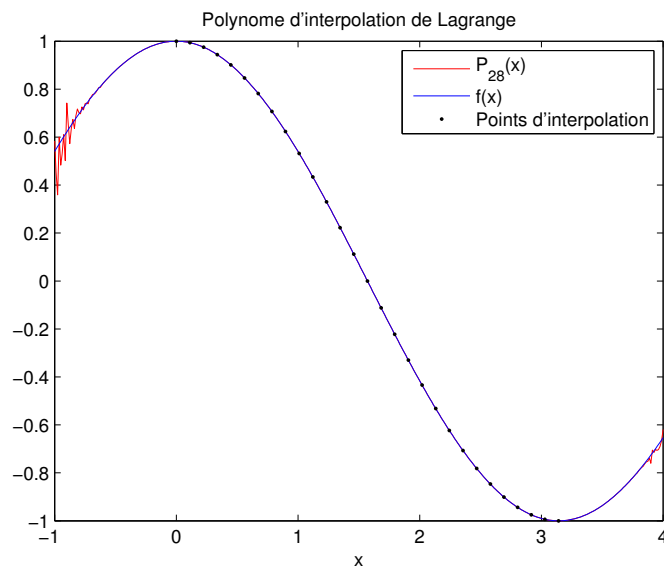
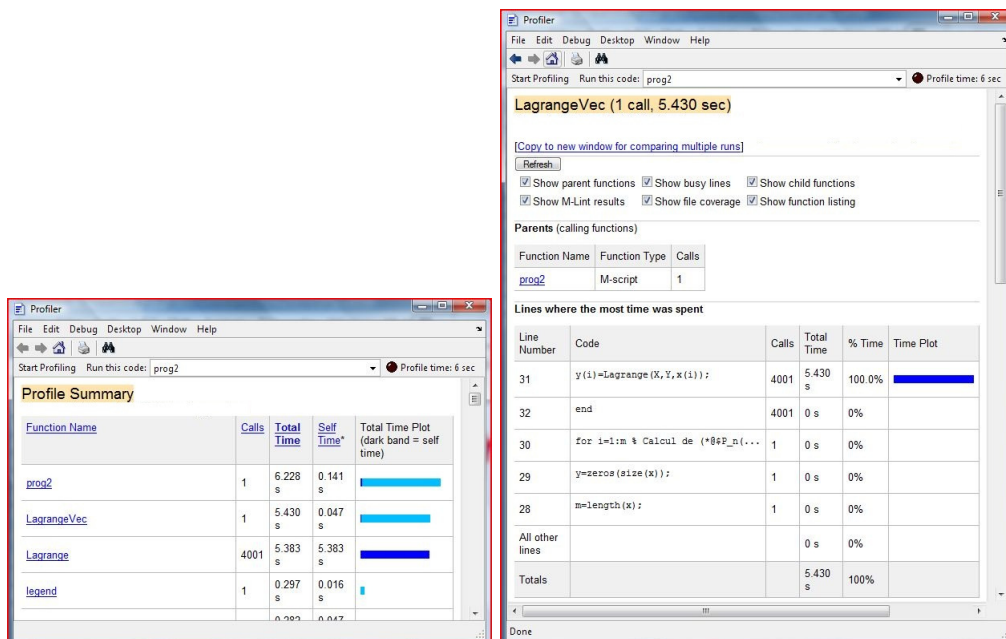


FIGURE 2: graphique obtenu à l'aide de prog1 (exercice 2)

FIGURE 3: Profiler avec prog2 (non optimisé), $m = 4000$

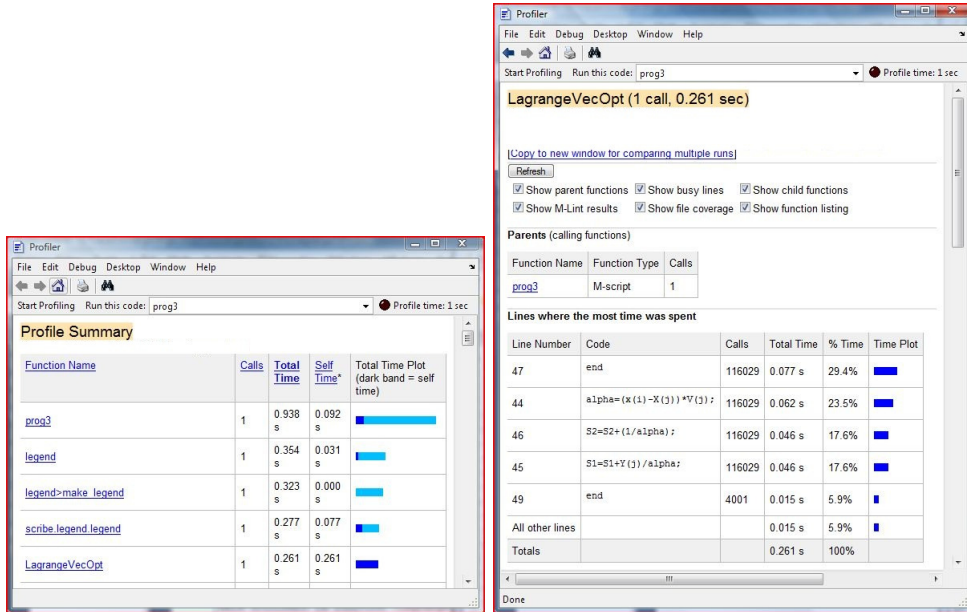


FIGURE 4: Profiler avec prog3 (optimisé), $m = 4000$

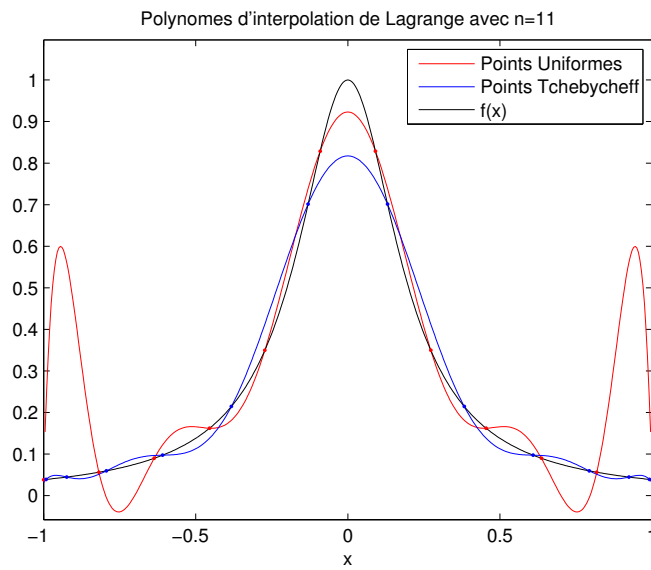


FIGURE 5: prog3 avec $n = 11$

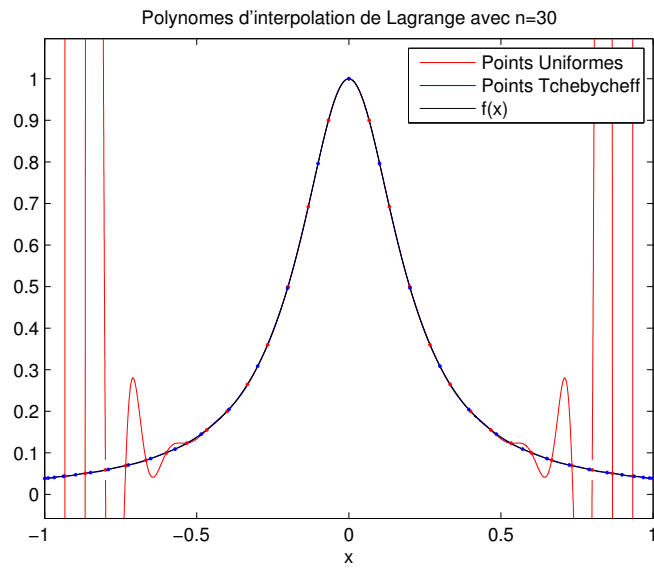


FIGURE 6: prog3 avec $n = 30$