Energétique App. **Méthodes Numériques**
Sup'Galilée **Année 2012-2013**

Travaux pratiques - 4

Durée : 4h00
8h30-12h30

Travail individuel et personnel

Remarques importantes

- Les trois parties sont indépendantes.
- Tout document autorisé.
- Aucun échange de documents.
- Aucune communication entre étudiants.

A faire avant 12h30

◇ Créer une archive compressée (format `zip`, `rar` ou `tar.gz`) nommée `<NOM>-TP4` contenant l'intégralité des codes permettant de répondre à l'ensemble des questions du sujet. Ici `<NOM>` correspond évidemment à votre nom. Cette archive contiendra aussi un fichier `Readme` expliquant l'utilisation de vos codes.

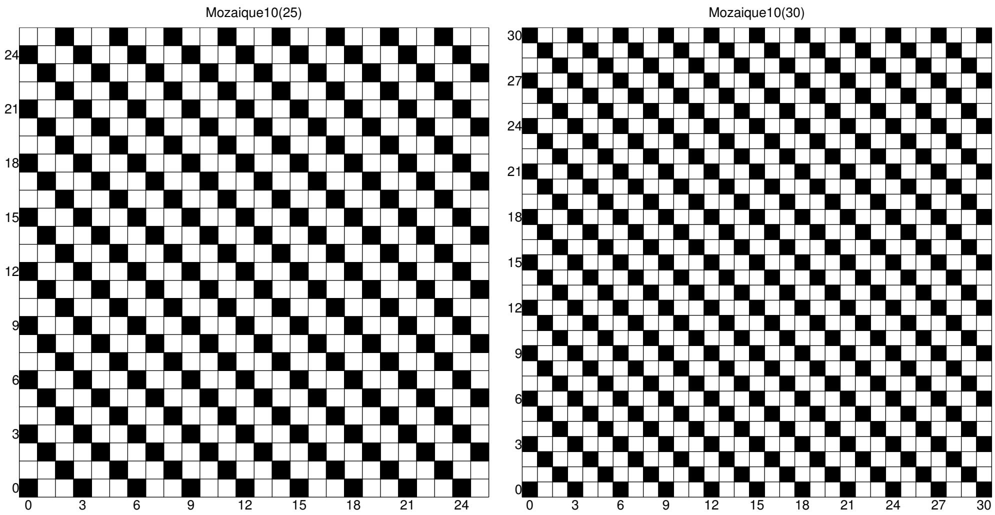
◇ Envoyer un mail à `cuvelier@math.univ-paris13.fr` ayant pour **sujet** "`<NOM> TP4 Ener App`" et en fichier joint l'archive compressée créée précédement.

Table des matières

1 Mozaïque (5 points)

On utilise ici les fonctions `black` et `Quadrillage` du premier TP.

Q. 1 *Ecrire la fonction `Mozaique10(n)` permettant d'obtenir la mozaique, sur le quadrillage associé (commande `Quadrillage(0,n,0,n)`), ayant les motifs suivants :*



2 Intégration numérique (10 points)

2.1 Formule de Gauss sur $[-1, 1]$

Soit f une fonction régulière de l'intervalle $[-1, 1]$. Les **formules de Gauss** permettent d'approcher l'intégrale de f sur $[-1, 1]$. Elles s'écrivent sous la forme générique

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} \omega_i f(x_i) \tag{0.1}$$

Voici le tableau permettant d'obtenir les trois premières formules :

Nombre de points, n	Poids (ω_i)	Points (x_i)
1	2	0
2	$1, 1$	$-\sqrt{1/3}, \sqrt{1/3}$
3	$5/9, 8/9, 5/9$	$-\sqrt{3/5}, 0, \sqrt{3/5}$

2.2 Formule de Gauss sur $[a, b]$

Soit f une fonction régulière de l'intervalle $[a, b]$. Par le changement de variable ramenant $[a, b]$ en $[-1, 1]$, on obtient

$$\int_{a}^{b} f(t)dt = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^{1} f\left(\frac{b-a}{2}x + \frac{a+b}{2}\right) dx \tag{0.2}$$

On peut alors appliquer la formule de Gauss à n points sur $[-1, 1]$, pour obtenir

$$\int_{a}^{b} f(t)dt \approx \mathcal{G}_n^{a,b}(f) = \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^{n} w_i f\left(\frac{b-a}{2}x_i + \frac{a+b}{2}\right). \tag{0.3}$$

2.3 Méthodes composites de Gauss pour le calcul de $\int_A^B f(x)dx$

Les méthodes composites sont basées sur la relation de Chasles.

Soit $(x_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ une discrétisation régulière de l'intervalle $[A, B]$: $x_k = A + kh$ avec $h = (B - A)/n$. On a alors

$$\int_{A}^{B} f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx. \tag{0.4}$$

La méthode **composite** de Gauss à n points consiste à approcher chacune des intégrales de (0.4) par la formule de Gauss à n points (0.3).

Théorème 1 *Soit f une fonction définie et suffisament régulière sur l'intervalle $[A, B]$. La méthode* ***composite*** *de Gauss à n points est d'ordre $2n-1$: elle est exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à $2n-1$. L'erreur commise est en $\mathcal{O}(h^{2n})$: elle est donc d'ordre $2n$.* ∎

Q. 2 *Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[A, B]$. Ecrire la fonction* QuadGauss1 *permettant de calculer une approximation de l'intégrale de f sur $[A, B]$ par la méthode* ***composite*** *de Gauss à 1 point.* ∎

Q. 3 *Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[A, B]$. Ecrire la fonction* QuadGauss2 *permettant de calculer une approximation de l'intégrale de f sur $[A, B]$ par la méthode* ***composite*** *de Gauss à 2 points.* ∎

Q. 4 *Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[A, B]$. Ecrire la fonction* QuadGauss3 *permettant de calculer une approximation de l'intégrale de f sur $[A, B]$ par la méthode* ***composite*** *de Gauss à 3 points.* ∎

2.4 Validation par l'ordre des formules de quadrature

On va vérifier les résultats d'exactitude des formules des différents théorèmes cités. Pour celà, on peut s'aider du tableau 1. Le fichier TestPoly.m (voir TP3) contenant les exemples du tableau est fourni : il génére un tableau de structure, chaque élément du tableau étant un des exemples.

a	b	$P(x)$	$\int_a^b P(x)dx$	degré
-1	1	$2x+3$	6	1
0	2	$3x^2-2x+3$	10	2
-2	2	$2x^3-4x^2-2x+3$	$-28/3$	3
0	2	$x^4+2x^3-4x^2-2x+3$	86/15	4
-2	2	$-2x^5-3x^4-2x^3-4x^2-2x+3$	$-716/15$	5
0	1	$x^6-2x^5-3x^4-2x^3-4x^2-2x+3$	$-131/210$	6
-1	1	$3x^7+4x^6-2x^5-3x^4-2x^3-4x^2-2x+3$	344/105	7
-2	1	$x^8-3x^7+4x^6-2x^5-3x^4-2x^3-4x^2-2x+3$	65811/280	8

Table 1 – Quelques intégrales exactes

Q. 5 *Ecrire un programme, nommé* validGaussPoly.m*, permettant de vérifier, pour chacune des 3 formules de quadrature précédentes et pour chacun des exemples fournis, l'ordre des formules de quadrature.* ∎

2.5 Validation par l'ordre de l'erreur

On va vérifier l'ordre des erreurs pour chacune des formules de quadrature programmées. On pourra utiliser comme exemple la fonction $f(x) = \sin(x)$ sachant que $\int_0^\pi \sin(x)dx = 2$.

Q. 6 *Ecrire un programme, nommé* erreurGauss.m*, permettant de vérifier graphiquement, pour chacune des 3 formules de quadrature précédentes , l'ordre des erreurs (voir figure 1).* ∎

3 Dérivation numérique (10 points)

Soit $h > 0$. Si $f \in \mathcal{C}^2(]a, b[)$, alors $\exists \xi_+ \in]\bar{x}, \bar{x}+h[$, $\exists \xi_- \in]\bar{x}-h, \bar{x}[$,tel que

$$\frac{f(\bar{x}+h)-f(\bar{x})}{h} = f'(\bar{x}) + \frac{h^1}{2} f^{(2)}(\xi_+) \quad (0.5)$$

$$\frac{f(\bar{x})-f(\bar{x}-h)}{h} = f'(\bar{x}) - \frac{h^1}{2} f^{(2)}(\xi_-) \quad (0.6)$$

- Ces formules sont des approximations de $f'(\bar{x})$ d'ordre 1 par rapport à h.
- On peut aussi obtenir ces formules en dérivant les polynômes d'interpolation associés aux points $\{\bar{x}, \bar{x}+h\}$ et $\{\bar{x}-h, \bar{x}\}$.

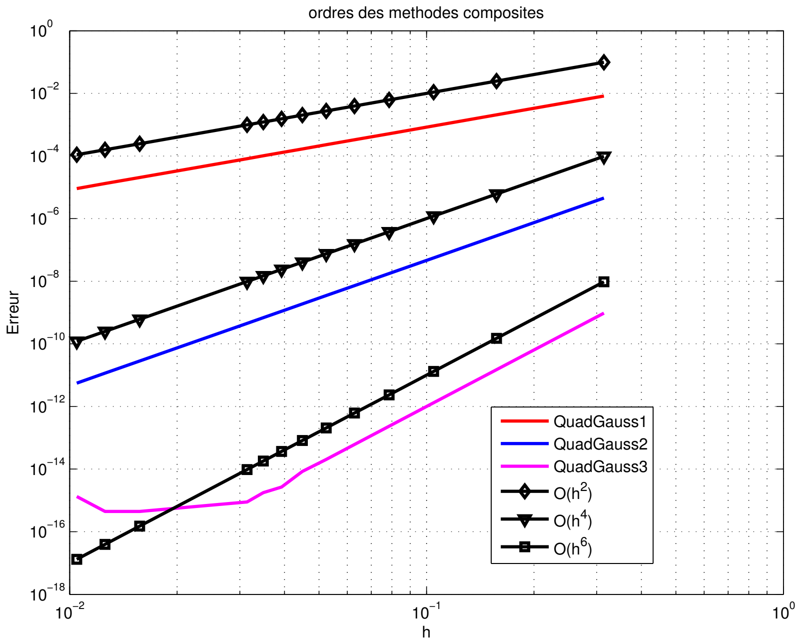


FIGURE 1 – Ordre de l'erreur des méthodes composites de Gauss

Q. 7 *On note $x_i = a + ih$, $i \in [\![0, n]\!]$, une discrétisation régulière de l'intervalle $[a, b]$. Soit une fonction f : $[a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ suffisament régulière. On suppose que les y_i sont donnés par*

$$y_i = f(x_i), \quad \forall i \in [\![0, n]\!]. \tag{0.7}$$

Ecrire une fonction DERIVE1 *permettant de calculer des approximations d'ordre 1 de $f'(x_i)$ pour $i \in [\![0, n]\!]$.* ▪

Pour obtenir une formule d'approximation d'ordre 2 de $f'(\bar{x})$, on suppose $f \in \mathcal{C}^3(]a, b[)$ et on peut alors développer les formules de Taylor de $f(\bar{x} + h)$ et $f(\bar{x} - h)$ jusqu'au troisième ordre.

On obtient alors

$$f'(\bar{x}) = \frac{f(\bar{x} + h) - f(\bar{x} - h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2). \tag{0.8}$$

- Cette approximation est la formule des **différences finies centrées**.
- Cette approximation est d'ordre 2.

Une autre approximation à l'ordre 2 de $f'(\bar{x})$ utilisant les valeurs de f aux points $\{\bar{x}, \bar{x} + h, \bar{x} + 2h\}$ est donnée par

$$f'(\bar{x}) = -\frac{f(\bar{x} + 2h) - 4f(\bar{x} + h) + 3f(\bar{x})}{2h} + O(h^2). \tag{0.9}$$

Une autre approximation de $f'(\bar{x})$ à l'ordre 2 utilisant les valeurs de f aux points $\{\bar{x}, \bar{x} - h, \bar{x} - 2h\}$ est donnée par

$$f'(\bar{x}) = \frac{3f(\bar{x}) - 4f(\bar{x} - h) + f(\bar{x} - 2h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2). \tag{0.10}$$

Q. 8 *On note $x_i = a + ih$, $i \in [\![0, n]\!]$, une discrétisation régulière de l'intervalle $[a, b]$. Soit une fonction f : $[a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ suffisament régulière. On suppose que les y_i sont donnés par*

$$y_i = f(x_i), \quad \forall i \in [\![0, n]\!]. \tag{0.11}$$

Ecrire une fonction DERIVE2 *permettant de calculer des approximations d'ordre 2 de $f'(x_i)$ pour $i \in [\![0, n]\!]$.* ▪

Q. 9 *Ecrire un programme, nommé* ERREURDERIVE.M, *permettant de vérifier graphiquement, pour chacune des 2 fonctions précédentes , l'ordre des erreurs. voir figure 2.* ▪

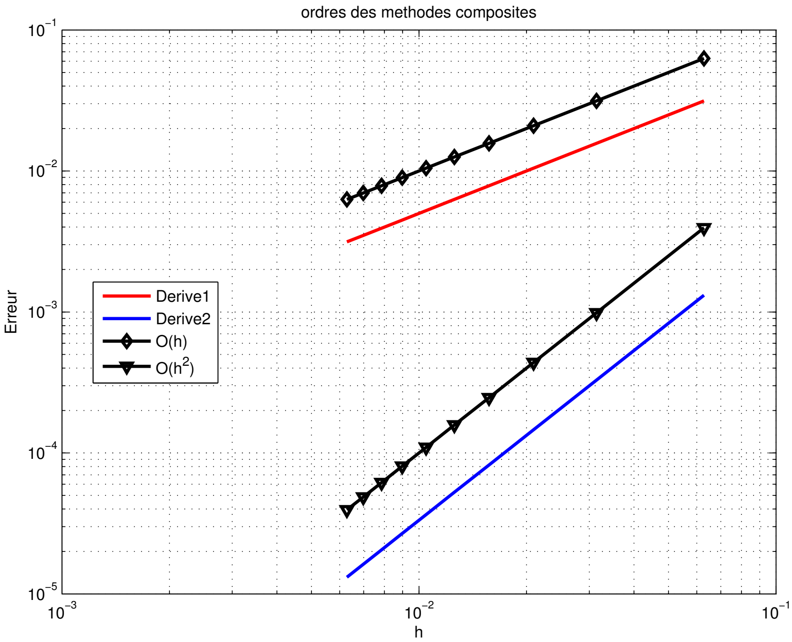


FIGURE 2 – Ordre de l'erreur des méthodes de dérivation