

Méthodes Numériques I ^a

Travaux Pratiques N° 3

• • • • •

Dérivation numérique

a. Version du 7 avril 2014

Table des matières

1	Approximation de dérivées premières	2
2	Approximation de dérivées secondes	2

1 Approximation de dérivées premières

Soit $h > 0$. Si $f \in \mathcal{C}^2(]a, b[)$, alors $\exists \xi_+ \in]\bar{x}, \bar{x} + h[$, $\exists \xi_- \in]\bar{x} - h, \bar{x}[$, tel que

$$\frac{f(\bar{x} + h) - f(\bar{x})}{h} = f'(\bar{x}) + \frac{h^1}{2} f^{(2)}(\xi_+) \quad (1.1)$$

$$\frac{f(\bar{x}) - f(\bar{x} - h)}{h} = f'(\bar{x}) - \frac{h^1}{2} f^{(2)}(\xi_-) \quad (1.2)$$

- Ces formules sont des approximations de $f'(\bar{x})$ d'ordre 1 par rapport à h .
- On peut aussi obtenir ces formules en dérivant les polynômes d'interpolation associés aux points $\{\bar{x}, \bar{x} + h\}$ et $\{\bar{x} - h, \bar{x}\}$.

Q. 1 On note $x_i = a + ih$, $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, une discrétisation régulière de l'intervalle $[a, b]$. Soit une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ suffisamment régulière. On suppose que les y_i sont donnés par

$$y_i = f(x_i), \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket. \quad (1.3)$$

Ecrire une fonction DERIVE1 permettant de calculer des approximations d'ordre 1 de $f'(x_i)$ pour $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$. ■

Pour obtenir une formule d'approximation d'ordre 2 de $f'(\bar{x})$, on suppose $f \in \mathcal{C}^3(]a, b[)$ et on peut alors développer les formules de Taylor de $f(\bar{x} + h)$ et $f(\bar{x} - h)$ jusqu'au troisième ordre.

On obtient alors

$$f'(\bar{x}) = \frac{f(\bar{x} + h) - f(\bar{x} - h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2). \quad (1.4)$$

- Cette approximation est la formule des **différences finies centrées**.
- Cette approximation est d'ordre 2.

Une autre approximation à l'ordre 2 de $f'(\bar{x})$ utilisant les valeurs de f aux points $\{\bar{x}, \bar{x} + h, \bar{x} + 2h\}$ est donnée par

$$f'(\bar{x}) = -\frac{f(\bar{x} + 2h) - 4f(\bar{x} + h) + 3f(\bar{x})}{2h} + \mathcal{O}(h^2). \quad (1.5)$$

Une autre approximation de $f'(\bar{x})$ à l'ordre 2 utilisant les valeurs de f aux points $\{\bar{x}, \bar{x} - h, \bar{x} - 2h\}$ est donnée par

$$f'(\bar{x}) = \frac{3f(\bar{x}) - 4f(\bar{x} - h) + f(\bar{x} - 2h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2). \quad (1.6)$$

Q. 2 On note $x_i = a + ih$, $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, une discrétisation régulière de l'intervalle $[a, b]$. Soit une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ suffisamment régulière. On suppose que les y_i sont donnés par

$$y_i = f(x_i), \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket. \quad (1.7)$$

Ecrire une fonction DERIVE2 permettant de calculer des approximations d'ordre 2 de $f'(x_i)$ pour $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$. ■

Q. 3 Ecrire un programme, nommé ERREURDERIVE.M, permettant de vérifier graphiquement, pour chacune des 2 fonctions précédentes, l'ordre des erreurs. voir figure 1. ■

2 Approximation de dérivées secondes

L'objectif ici est déterminer une approximation d'ordre 2 de la dérivée seconde d'une fonction f (suffisamment régulière) en les points d'une discrétisation régulière $x_i = a + ih$, $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, de l'intervalle $[a, b]$.

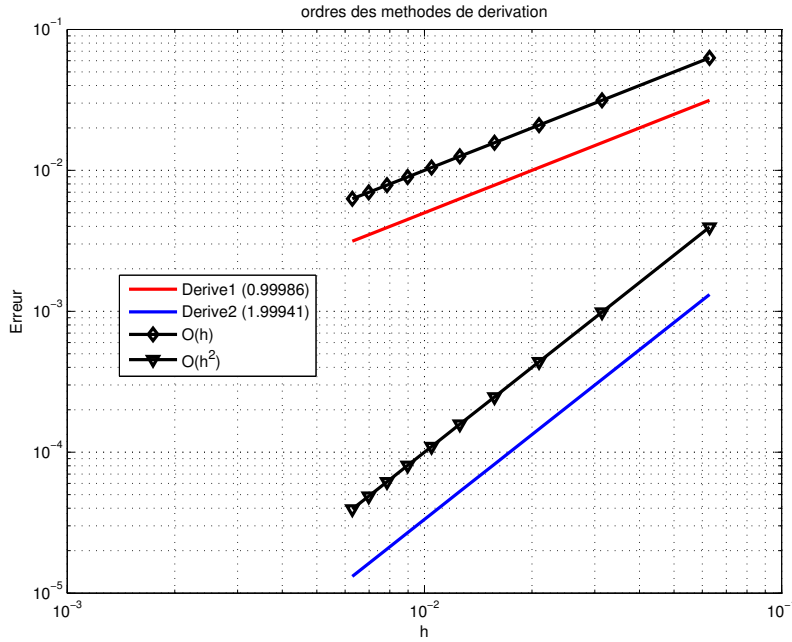


FIGURE 1 – Ordre de l'erreur des méthodes de dérivation

En utilisant les formules de Taylor de de $f(\bar{x} + h)$ et $f(\bar{x} - h)$ jusqu'au quatrième ordre, on abouti à

$$f^{(2)}(\bar{x}) = \frac{f(\bar{x} + h) - 2f(\bar{x}) + f(\bar{x} - h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2). \quad (2.8)$$

On peut utiliser cette formule pour obtenir des approximations de la dérivée seconde de f en x_i , $\forall i \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$.

Il reste à déterminer des formules aux points $x_0 = a$ et $x_n = b$.

Pour obtenir une formule aux points $x_0 = a$ on peut utiliser des formules de Taylor de de $f(\bar{x} + h)$, $f(\bar{x} + 2h)$ et $f(\bar{x} + 3h)$ jusqu'au quatrième ordre. On a :

$$f(\bar{x} + h) = f(\bar{x}) + hf^{(1)}(\bar{x}) + \frac{h^2}{2!}f^{(2)}(\bar{x}) + \frac{h^3}{3!}f^{(3)}(\bar{x}) + \mathcal{O}(h^4) \quad (2.9)$$

$$f(\bar{x} + 2h) = f(\bar{x}) + 2hf^{(1)}(\bar{x}) + \frac{(2h)^2}{2!}f^{(2)}(\bar{x}) + \frac{(2h)^3}{3!}f^{(3)}(\bar{x}) + \mathcal{O}(h^4) \quad (2.10)$$

$$f(\bar{x} + 3h) = f(\bar{x}) + 3hf^{(1)}(\bar{x}) + \frac{(3h)^2}{2!}f^{(2)}(\bar{x}) + \frac{(3h)^3}{3!}f^{(3)}(\bar{x}) + \mathcal{O}(h^4) \quad (2.11)$$

En effectuant les combinaisons $2 \times (2.9) - (2.10)$ et $3 \times (2.9) - (2.10)$ on obtient respectivement les deux équations

$$\begin{aligned} 2f(\bar{x} + h) - f(\bar{x} + 2h) &= f(\bar{x}) - h^2f^{(2)}(\bar{x}) - h^3f^{(3)}(\bar{x}) + \mathcal{O}(h^4) \\ 3f(\bar{x} + h) - f(\bar{x} + 3h) &= 2f(\bar{x}) - 3h^2f^{(2)}(\bar{x}) - 4h^3f^{(3)}(\bar{x}) + \mathcal{O}(h^4) \end{aligned}$$

d'où les deux formules d'ordre 1

$$f^{(2)}(\bar{x}) = \frac{f(\bar{x}) - 2f(\bar{x} + h) + f(\bar{x} + 2h)}{h^2} - hf^{(3)}(\bar{x}) + \mathcal{O}(h^2) \quad (2.12)$$

$$f^{(2)}(\bar{x}) = \frac{2f(\bar{x}) - 3f(\bar{x} + h) + f(\bar{x} + 3h)}{3h^2} - \frac{4}{3}hf^{(3)}(\bar{x}) + \mathcal{O}(h^2) \quad (2.13)$$

En effectuant la combinaison $4 \times (2.12) - 3(2.13)$, on obtient la formule d'ordre 1

$$\begin{aligned} f^{(2)}(\bar{x}) &= 4 \frac{f(\bar{x}) - 2f(\bar{x} + h) + f(\bar{x} + 2h)}{h^2} - 3 \frac{2f(\bar{x}) - 3f(\bar{x} + h) - f(\bar{x} + 3h)}{3h^2} + \mathcal{O}(h^2) \\ &= \frac{2f(\bar{x}) - 5f(\bar{x} + h) + 4f(\bar{x} + 2h) - f(\bar{x} + 3h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2) \end{aligned} \quad (2.14)$$

On prendra comme approximation d'ordre 2

$$f^{(2)}(a) \approx \frac{2f(a) - 5f(a + h) + 4f(a + 2h) - f(a + 3h)}{h^2}.$$

Q. 4 Montrer que l'on a

$$f^{(2)}(\bar{x}) = \frac{2f(\bar{x}) - 5f(\bar{x} - h) + 4f(\bar{x} - 2h) - f(\bar{x} - 3h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2) \quad (2.15)$$

En déduire une approximation de $f^{(2)}(b)$. ■

Q. 5 Ecrire une fonction `DERIVESEC2` permettant de calculer des approximations d'ordre 2 de $f^{(2)}(x_i)$ pour $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$. ■

Q. 6 Ecrire un programme, nommé `ERREURDERIVESECONDE.M`, permettant de vérifier/retrouver graphiquement, l'ordre de la méthode d'approximation précédente. voir figure 2. ■

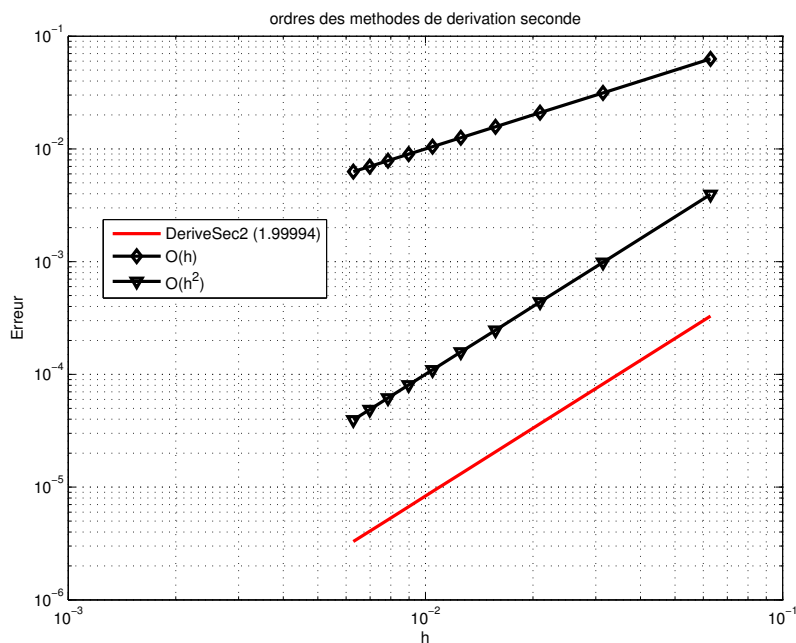


FIGURE 2 – Ordre de l'erreur de l'approximation de la dérivée seconde