Energétique App. 1ère année **Méthodes Numériques I**
Sup'Galilée **Année 2012-2013**

Partiel du 7 mai 2013

durée : 1h30.

Sans documents, sans calculatrice, sans portable, ...

Tous les calculs doivent être justifiés

Exercice 1 : 10 points

Soit u une fonction régulière de l'intervalle $[-1,1]$. Les **formules de Gauss** permettent d'approcher l'intégrale de u sur $[-1,1]$. Elles s'écrivent sous la forme générique

$$\int_{-1}^{1} u(s)ds \approx \sum_{i=1}^{n} \omega_i u(s_i) \tag{1}$$

Voici le tableau permettant d'obtenir les trois premières formules :

Nombre de points, n	Poids (ω_i)	Points (s_i)
1	2	0
2	$1, 1$	$-\sqrt{1/3}, \sqrt{1/3}$
3	$5/9, 8/9, 5/9$	$-\sqrt{3/5}, 0, \sqrt{3/5}$

Q. 1 *A partir du tableau précédant, écrire explicitement les formules de Gauss à 1, 2 et 3 points pour le calcul d'une approximation de* $\int_{-1}^{1} u(s)ds$. ∎

Soit g une fonction régulière de l'intervalle $[\alpha,\beta]$. Par le changement de variable ramenant $[\alpha,\beta]$ en $[-1,1]$, on obtient

$$\int_{\alpha}^{\beta} g(t)dt = \frac{\beta-\alpha}{2}\int_{-1}^{1} g\left(\frac{\beta-\alpha}{2}s + \frac{\alpha+\beta}{2}\right) ds \tag{2}$$

On peut alors appliquer la formule de Gauss à n points sur $[-1,1]$, pour obtenir

$$\int_{\alpha}^{\beta} g(t)dt \approx \mathcal{G}_n^{\alpha,\beta}(g) = \frac{\beta-\alpha}{2}\sum_{i=1}^{n} w_i g\left(\frac{\beta-\alpha}{2}s_i + \frac{\alpha+\beta}{2}\right). \tag{3}$$

Q. 2 *En s'aidant de la question précédante, écrire les formules de Gauss à 1, 2 et 3 points pour le calcul d'une approximation de* $\int_{\alpha}^{\beta} g(t)dt$. ∎

Soit f une fonction régulière de l'intervalle $[a,b]$. On note x_i, $i \in [\![0,N]\!]$ une discrétisation régulière de l'intervalle $[a,b]$.

Q. 3
1. *Donner la formule permettant de calculer l'ensemble des* x_i.
2. *Ecrire une fonction (algorithmique ou Matlab)* DisReg *permettant de retourner cette discrétisation.* ∎

Q. 4
1. *Expliquer le principe de la méthode* **composite** *utilisant la discrétisation précédante et la formule de Gauss à 2 points pour le calcul d'une approximation de* $\int_a^b f(x)dx$.
2. *Ecrire une fonction (algorithmique ou Matlab)* QuadGauss *permettant de retourner cette approximation.* ∎

L'erreur commise entre $\int_a^b f(x)dx$ et son approximation par la formule composite de Gauss à n points est donnée par Ch^{2n+2} où $h = \frac{b-a}{N}$ est la pas de la discrétisation et C une constante indépendante de h. L'ordre de l'erreur est la puissance de h : $2n+2$.

Q. 5
1. *Expliquez comment obtenir numériquement l'ordre de l'erreur de la la méthode* **composite** *de Gauss à 2 points.*
2. *Ecrire un programme (algorithmique ou Matlab) permettant d'obtenir numériquement cet ordre.* ∎

Exercice 2 : 10 points

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ (matrice réelle m lignes, n colonnes) et $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^p$. Le vecteur produit $\boldsymbol{v} = \mathbb{A}\boldsymbol{u}$ a pour composantes

$$v_i = \sum_{j=1}^{n} A_{i,j} u_j.$$

Q. 1 (mathématiques) *1. Quelle est la condition sur l' indice p pour que le vecteur produit $\boldsymbol{v}$ soit bien défini?*

2. Quelle est la dimension du vecteur produit $\boldsymbol{v}$? ▪

Q. 2 (algorithmique) *Ecrire la fonction* MatMult *permettant de retourner le produit d'une matrice par un vecteur. (Si vous n'avez pas su répondre à la question précédente prendre $m = p = n$ et $v \in \mathbb{R}^n$)* ▪

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$. La matrice produit $\mathbb{C} = \mathbb{A}\mathbb{B}$ a pour composantes

$$C_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} A_{i,k} B_{k,j}.$$

Q. 3 (mathématiques) *1. Quelle est la condition sur les dimensions des matrices $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ pour que la matrice produit $\mathbb{C}$ soit bien définie?*

2. Quelles sont les dimensions de la matrice produit $\mathbb{C}$? ▪

Q. 4 (algorithmique) *Ecrire la fonction* MatMatMult *permettant de retourner le produit de deux matrices. (Si vous n'avez pas su répondre à la question précédente prendre $m = p = q = n$. Dans ce cas les trois matrices sont de dimension $n \times n$)* ▪

Soit $\mathbb{D} \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ une matrice diagonale ($D_{i,j} = 0$ si $j \neq i$) et $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$. On souhaite résoudre le système linéaire $\mathbb{D}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

Q. 5 *1. A quelles conditions sur les coefficients de la matrice, le système admet-il une unique solution?*

2. Expliquer comment résoudre ce système linéaire en explicitant l'ensemble des formules nécessaire.

3. Ecrire la fonction RSLdiag *(algorithmique ou Matlab) permettant de résoudre le système linéaire $\mathbb{D}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.* ▪

Soit $\mathbb{L} \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ une matrice triangulaire inférieure ($L_{i,j} = 0$ si $j > i$) et $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$. On souhaite résoudre le système linéaire $\mathbb{L}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, c'est à dire trouver le vecteur $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\begin{pmatrix} L_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ L_{n,1} & \dots & \dots & L_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \tag{1}$$

Q. 6 *1. A quelles conditions sur les coefficients de la matrice, le système (1) admet-il une unique solution?*

2. Expliquer comment résoudre ce système linéaire en explicitant l'ensemble des formules nécessaire.

3. Ecrire la fonction RSLinf *(algorithmique ou Matlab) permettant de résoudre le système linéaire $\mathbb{L}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.* ▪