ENER1A **Méthodes Numériques I**
Sup'Galilée **Année 2014-2015**

Examen du 9 septembre 2015

durée : 1h30.

Sans documents, sans calculatrice, sans portable, ...

Exercice 1 : 6 points

On note $x_i = a+ih$, $i \in [\![0,n]\!]$, une discrétisation régulière de l'intervalle $[a,b]$. Soit une fonction $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ suffisament régulière. On suppose que les y_i sont donnés par

$$y_i = f(x_i), \quad \forall i \in [\![0,n]\!]. \tag{1}$$

Q. 1 (Matlab) *Ecrire une fonction (Matlab)* DisReg *permettant de retourner l'ensemble des* $(x_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$. ▪

On rappelle le théorème suivant

Théorème 1 (Taylor-Lagrange) *On suppose que $f \in \mathcal{C}^{n+1}$ sur I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $\bar{x} \in I$ et $h \in \mathbb{R}$ tel que $\bar{x}+h$ appartienne à I, on a*

$$f(\bar{x}+h) = f(\bar{x}) + \sum_{k=1}^{n} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(\bar{x}) + \mathcal{O}(h^{n+1}) \tag{2}$$

▪

Q. 2 (mathématiques) *1. En utilisant* (1) *et les formules de Taylor en x_{i+1} et x_{i-1}, montrer que,* $\forall i \in [\![1,n-1]\!]$,

$$f'(x_i) = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \tag{3}$$

2. En utilisant (1) *et les formules de Taylor en x_{i+1} et x_{i+2}, montrer que,* $\forall i \in [\![0,n-2]\!]$,

$$f'(x_i) = \frac{-3y_i + 4y_{i+1} - y_{i+2}}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \tag{4}$$

3. En utilisant (1) *et les formules de Taylor en x_{i-1} et x_{i-2}, montrer que,* $\forall i \in [\![2,n]\!]$,

$$f'(x_i) = \frac{3y_i - 4y_{i-1} + y_{i-2}}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \tag{5}$$

▪

Q. 3 (algorithmique) *A partir des formules précédentes, écrire une fonction (algorithmique ou Matlab)* Derive2 *permettant de calculer des approximations d'ordre 2 de $f'(x_i)$ pour $i \in [\![0,n]\!]$.* ▪

Exercice 2 : 7 points

Soient t, z deux réels, m, n, p, q des entiers strictement supérieurs à 1, $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_p)$ un vecteur de $\mathbb{R}^p$ et $\boldsymbol{w} = (w_1, \ldots, w_q)$ un vecteur de $\mathbb{R}^q$.

Soit α le réel défini par

$$\alpha = \sum_{k=1}^{p} \left((y_k + k) \prod_{j=1}^{n} (x_j + k/j) \right).$$

Q. 1 *1. Quelles sont les données nécessaires et suffisantes permettant de calculer α? Préciser les types et les dimensions.*

2. Ecrire la fonction ***SP*** *(algorithmique ou Matlab) permettant de calculer α. Toutes les données seront passées en paramètre à la fonction.*

3. *Ecrire un programme Matlab (complet) utilisant la fonction **SP** supposée écrite en langage Matlab.* ∎

Soit $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_q)$ le vecteur de $\mathbb{R}^q$ défini par

$$\boldsymbol{a}_i = \prod_{j=1}^{p} \left((y_j + i\pi) \sum_{k=1}^{m} (j + \sin(z - kt)) \right), \ \forall i \in [\![1, q]\!].$$

Q. 2 1. *Quelles sont les données nécessaires et suffisantes permettant de calculer $\boldsymbol{a}$? Préciser les types et les dimensions.*

2. *Ecrire la fonction Matlab **PS** permettant de calculer $\boldsymbol{a}$. Toutes les données seront passées en paramètre à la fonction.*

3. *Ecrire un programme Matlab (complet) utilisant cette fonction.* ∎

Exercice 3 : 7 points

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_i, y_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ avec $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$ et les x_i distincts deux à deux. Le **polynôme d'interpolation de Lagrange** associé aux $n+1$ points $(x_i, y_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$, noté $\mathcal{P}_n$, est donné par

$$\mathcal{P}_n(t) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(t), \ \forall t \in \mathbb{R} \tag{1}$$

avec

$$\forall i \in [\![0, n]\!], \quad L_i(t) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{t - x_j}{x_i - x_j}, \ \forall t \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Théorème 2 *Le **polynôme d'interpolation de Lagrange**, $\mathcal{P}_n$, associé aux $n+1$ points $(x_i, y_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$, est l'unique polynôme de degré au plus n, vérifiant*

$$\mathcal{P}_n(x_i) = y_i, \ \forall i \in [\![0, n]\!]. \tag{3}$$

∎

Q. 1 (algorithmique) *Ecrire la fonction* Lagrange *permettant de calculer $\mathcal{P}_n$ (polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux $n+1$ points $(x_i, y_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$) au point $t \in \mathbb{R}$.* ∎

Q. 2 (Matlab) *Ecrire un script Matlab permettant de représenter sur la même figure:*

- *la fonction $f(t) = \sin(t^2)$ sur l'intervalle $[-2, 2]$.*
- *les points (x_i, y_i) pour $i \in [\![0, n]\!]$, n étant un entier compris entre 3 et 11 demandé à l'utilisateur, les points x_i étant ceux de la la discrétisation régulière de l'intervalle $[-\pi/2, \pi/2]$ avec $n+1$ points et $y_i = f(x_i)$.*
- *le polynôme d'interpollation de Lagrange $\mathcal{P}_n$ associé aux $n+1$ points $(x_i, y_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$, sur l'intervalle $[-2, 2]$.*

On supposera la fonction Lagrange *de la question précédente déjà implémentée sous Matlab.* ∎