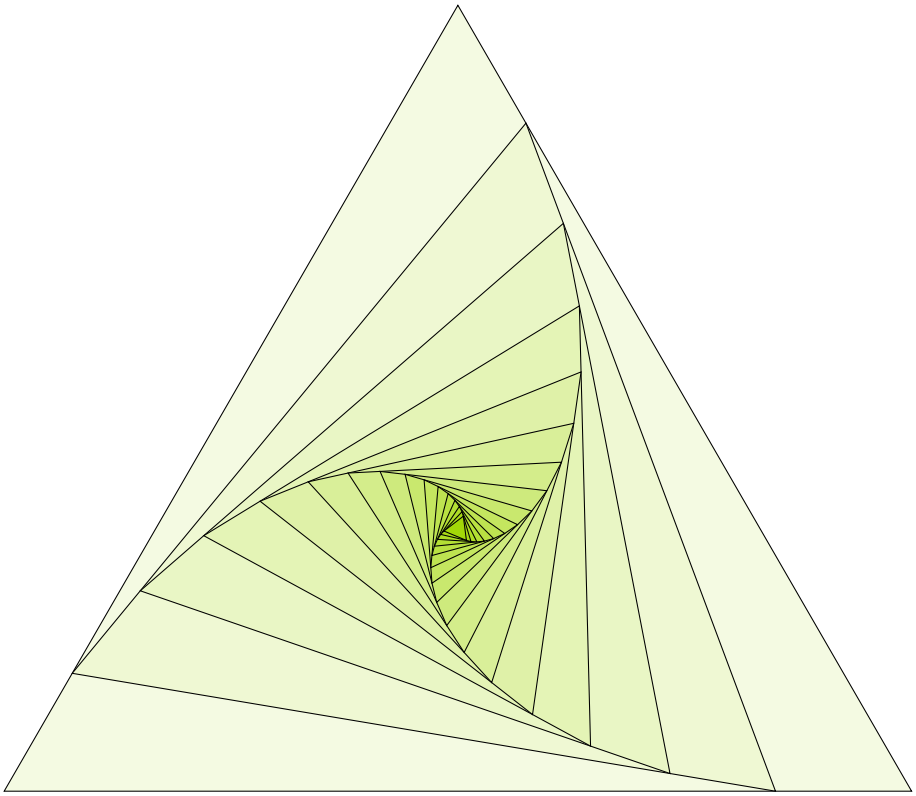
Algorithmique numérique

Notes de cours

Sup Galilée, Ingénieurs 1ère année



Francois Cuvelier
Université Paris XIII / Institut Galilée
L.A.G.A./Département de Mathématiques

Table des matières

Chapitre 1

Algorithmique Numérique

1.1 Introduction

Le but ici est d'acquérir une méthodologie permettant de *mettre sur le papier* la résolution d'un problème donné (bien posé!). Pour celà, nous utiliserons un ensemble d'instructions dont l'application permet de résoudre le problème en un nombre fini d'opérations (ou d'actions).

Ceci est l'objet de l'algoritmique :

Définition 1.1 (Petit Robert 97) **Algorithmique :** Enchaînement d'actions nécessaires à l'accomplissement d'une tâche.

1.1.1 Exemple 1 : permutation de deux voitures

Tâche : *Permuter deux voitures sur un parking de trois places numérotées de P_1 à P_3 et ceci sans géner la circulation. La voiture B, est sur l'emplacement P_2, la voiture R, est sur l'emplacement P_3.*

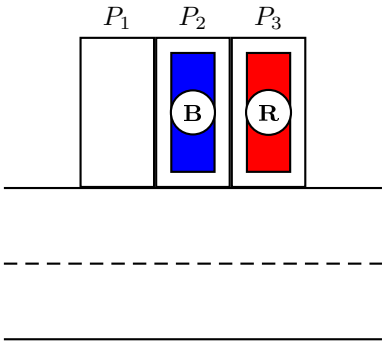


Figure 1.1: Avant permutation

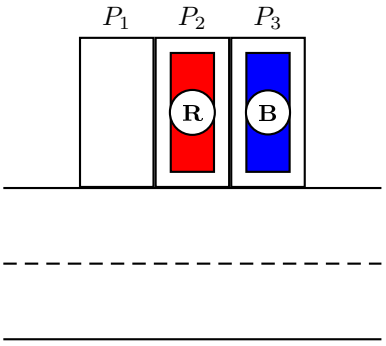


Figure 1.2: Après permutation

Voici, l'«algoritme» basique permettant de réaliser cette tâche :

1: Déplacer la voiture R de l'emplacement P_3 à P_1.
2: Déplacer la voiture B de l'emplacement P_2 à P_3.
3: Déplacer la voiture R de l'emplacement P_1 à P_2.

Malheureusement, cet algorithme souffre de nombreuses lacunes et ambiguités :

- Au départ, l'emplacement P_1 est-il libre?
- Que veut-dire l'action **déplacer**? Si les voitures sont non-roulantes, prendre une grue? sinon a-t'on les clés des deux véhicules?
- Dans l'énoncé, il est dit «sans géner la circulation»! Donc il y a de la circulation et à tout moment un véhicule extérieur au problème peut venir occuper un emplacement libre!
- ...

En fait, les lacunes et ambiguités proviennent pour la plupart d'une mauvaise description de la tâche à réaliser : le problème est mal posé.

Cependant nous pouvons tout de même écrire un algorithme mais en restreignant son champ d'application : nous allons faire des **hypothèses** sur les données du problème.

Tout d'abord il faut préciser les **données** du problème :

Données :

Parking de trois emplacements, numérotés de P_1 à P_3.
Deux voitures,l'une notée B et l'autre R.

Ensuite, nous précisons les **hypothèses** sur les données

Hypothèses sur les données :

- La voiture B est sur l'emplacement P_2.
- La voiture R est sur l'emplacement P_3.
- Les deux voitures sont «roulantes».

Ensuite, nous donnons des hypothèses plus générales

Hypothèses générales :

1. Une seule personne réalise la tâche.
2. Celle-ci a son permis de conduire et les clés des deux voitures.
3. Lors du déplacement d'un véhicule d'un emplacement à un autre aucune voiture extérieur ne vient sur le parking.
4. Une voiture extérieur ne reste qu'un temps fini sur un emplacement

Nous considérons que la phase de déplacement d'un véhicule d'un emplacement à un autre (libre) ne pose aucun problème au titulaire d'un permis! Et enfin, nous précisons le résultat voulu :

Résultats :

1. La voiture B est sur l'emplacement P_3.
2. La voiture R est sur l'emplacement P_2.

Nous obtenons alors l'algorithme suivant :

```
Aller au volant du véhicule R (emplacement P3).
Tantque emplacement P1 est occupé faire
    Attendre.
Fin
Déplacer le véhicule R de l'emplacement P3 à P1
Aller au volant du véhicule B (emplacement P2).
Tantque emplacement P3 est occupé faire
    Attendre.
Fin
Déplacer le véhicule B de l'emplacement P2 à P3
Aller au volant du véhicule R (emplacement P1).
Tantque emplacement P2 est occupé faire
    Attendre.
Fin
Déplacer le véhicule R de l'emplacement P1 à P2
```

1.1.2 Exemple 2 : résolution d'une équation

Tâche : *Résoudre l'équation* $ax = b$.

Voici, l'«algoritme» basique permettant de réaliser cette tâche :

```
1: Si a différent de 0 alors
2:    La solution est x = b/a.
3: Sinon
4:    Il n'y a pas de solution
5: Fin
```

Une nouvelle fois, l'énoncé de la tâche à effectuer est trop imprécise! En effet, rien ne nous permet d'affirmer que x est l'inconnue ou que a n'est pas une matrice. Il faut alors palier au manque d'informations en ajoutant des hypothèses pour **clarifier le problème** :

Soient $a \in \mathbb{R}*$ et $b \in \mathbb{R}$ donnés. Le problème est

$$\text{trouver } x \in \mathbb{R} \text{ tel que } ax = b.$$

Ce problème est bien posé : sa résolution ne souffre d'aucune ambiguitée.

Algorithme 1.1 Résolution de l'équation du premier degré $ax = b$. {AlgoEq1D}

Données : a : un réel non nul,
b : un réel.
Résultat : x : un réel.

1: $x \leftarrow b/a$

1.1.3 caractéristiques

Voici en résumé les caractéristiques d'un *bon* algorithme :

- Il ne souffre d'aucune ambiguité $\Rightarrow$ très clair.
- Combinaison d'opérations (actions) élémentaires.
- Pour toutes les données d'entrée, l'algorithme doit fournir un résultat en un nombre fini d'opérations.
- Il est adapté au public auquel il est destiné.

1.1.4 Première approche méthodologique

Nous présentons ci-dessous quelques éléments méthodologiques pour la réalisation d'un algorithme :

Etape 1 : Définir clairement le problème.

Etape 2 : Rechercher une méthode de résolution (formules, ...)

Etape 3 : Ecrire l'algorithme (par raffinement successif pour des algorithmes *compliqués*).

1.2 Pseudo-langage algorithmique

Pour uniformiser l'écriture des algorithmes nous employons, un pseudo-langage contenant l'indispensable :

- variables,
- opérateurs (arithmétiques, relationnels, logiques),

- expressions,
- instructions (simples et composées),
- fonctions.

Ce pseudo-langage sera de fait très proche du langage de programmation de Matlab.

1.2.1 Données et constantes

Une donnée est une valeur introduite par l'utilisateur (par ex. une température, une vitesse, ... Une constante est un symbole ou un identificateur non modifiable (par ex. π, la constante de gravitation,...)

1.2.2 Variables

Définition 1.2 Une variable est un objet dont la valeur est modifiable, qui possède un nom et un type (entier, charactère, réel, complexe, ...). Elle est rangée en mémoire à partir d'une certaine adresse.

1.2.3 Opérateurs

Opérateurs arithmétiques

Nom	Symbole	Exemple
addition	$+$	$a+b$
soustraction	$-$	$a-b$
opposé	$-$	$-a$
produit	$*$	$a*b$
division	$/$	a/b
division	^	$a\hat{}b$

Opérateurs relationnels

Nom	Symbole	Exemple	Commentaires
identique	$==$	$a==b$	vrai si a et b ont même valeur, faux sinon.
différent	$\sim=$	$a\sim=b$	faux si a et b ont même valeur, vrai sinon.
inférieur	$<$	$a<b$	vrai si a est plus petit que b, faux sinon.
supérieur	$>$	$a>b$	vrai si a est plus grand que b, faux sinon.
inférieur ou égal	$<=$	$a<=b$	vrai si a est plus petit ou égal à b, faux sinon.
supérieur ou égal	$>=$	$a>=b$	vrai si a est plus grand ou égal à b, faux sinon.

Opérateurs logiques

Nom	Symbole	Exemple	Commentaires
négation	$\sim$	$\sim a$	vrai si a est faux (ou nul), faux sinon.
ou	$\|$	$a\|b$	vrai si a **ou** b est vrai (non nul), faux sinon.
et	&	$a\&b$	vrai si a **et** b sont vrais (non nul), faux sinon.

Opérateur d'affectation

Nom	Symbole	Exemple	Commentaires
affectation	$\leftarrow$	$a\leftarrow b$	On affecte à la variable a le contenu de b

L'expression à gauche du symbole $\leftarrow$ doit être une variable.

1.2.4 Expressions

Définition 1.3 Une expression est un groupe d'opérandes (i.e. nombres, constantes, variables, ...) liées par certains opérateurs pour former un terme algébrique qui représente une valeur (i.e. un élément de donnée simple)

Exemple 1

- Voici un exemple classique d'expression numérique :

$$(b * b - 4 * a * c)/(2 * a).$$

On appelle **opérandes** les identifiants a, b et c, et les nombres 4 et 2. Les symboles $*$, $-$ et $/$ sont les **opérateurs**.

- Voici un exemple classique d'expression booléenne (logique) :

$$(x < 3.14)$$

Dans cette expression, x est une variable numérique et 3.14 est un nombre réel. Cette expression prendra la valeur vrai (i.e. 1) si x est plus grand que 3.14. Sinon, elle prendra la valeur faux (i.e. 0)

1.2.5 Instructions

Définition 1.4 Une **instruction** est un ordre ou un groupe d'ordres qui déclenche l'exécution de certaines actions par l'ordinateur. Il y a deux types d'instructions : simple et structuré.
Les **instructions simples** sont essentiellement des ordres seuls et inconditionnels réalisant l'une des tâches suivantes :

1. affectation d'une valeur a une variable.
2. appel d'une fonction (procedure, subroutine, ... suivant les langages).

Les **instructions structurées** sont essentiellement :

1. les instructions composées, groupe de pulsieurs instructions simples,
2. les instructions répétitives, permettant l'exécution répétée d'instructions simples, (i.e. boucles «pour», «tant que»)
3. les instructions conditionnelles, lesquels ne sont exécutées que si une certaine condition est respectée (i.e. «si»)

Les exemples qui suivent sont écrits dans un pseudo langage algorithmique mais sont facilement transposable dans la plupart des langages de programmation.

Instructions simples

Voici un exemple de l'*instruction simple d'affectation* :

1: $a \leftarrow 3.14 * R$

On évalue l'expression $3.14 * R$ et affecte le résultat à la variable a.
Un autre exemple est donné par l'*instruction simple d'affichage* :

```
affiche('bonjour')
```

Affiche la chaine de caractères `'bonjour'` à l'écran. Cette instruction fait appel à la fonction `affiche`.

Instructions composées

Instructions répétitives, boucle «pour»

Algorithme 1.2 Exemple de boucle «pour»

Données : n : un entier.

1: $S \leftarrow 0$
2: **Pour** $i \leftarrow 1$ **à** n **faire**
3: $\quad S \leftarrow S + \cos(i^2)$
4: **Fin**

Instruction répétitive, boucle «tant que»

Algorithme 1.3 Exemple de boucle «tant que»

```
1: i ← 0, x ← 1
2: Tantque i < 1000 faire
3:     x ← x + i * i
4:     i ← i + 1
5: Fin
```

Instruction répétitive, boucle «répéter ...jusqu'à»

Algorithme 1.4 Exemple de boucle «répéter ...jusqu'à»

```
1: i ← 0, x ← 1
2: Répéter
3:     x ← x + i * i
4:     i ← i + 1
5: jusqu'à i>=1000
```

Instructions conditionnelles «si»

Algorithme 1.5 Exemple d'instructions conditionnelle «si»

Données : *note* : un réel.

```
1: Si note > 12 alors
2:     affiche('gagne')
3: Sinon Si note ⩾ 8 alors
4:     affiche('oral')
5: Sinon
6:     affiche('perdu')
7: Fin
```

1.2.6 Fonctions

Les fonctions permettent

- d'automatiser certaines tâches répétitives au sein d'un même programme,
- d'ajouter à la clarté d'un programme,
- l'utilisation de portion de code dans un autre programme,
- ...

Fonctions prédéfinies

Pour faciliter leur usage, tous les langages de programmation possèdent des fonctions prédéfinies. On pourra donc supposer que dans notre langage algorithmique un grand nombre de fonctions soient prédéfinies : par exemple, les fonctions mathématiques sin, cos, exp, abs, $\cdots$ (pour ne citer quelles)

Syntaxe

On utilise la syntaxe suivante pour la définition d'une fonction

Fonction $[args_1, \ldots, args_n] \leftarrow$ NomFonction($arge_1, \ldots, arge_m$)
instructions
Fin

La fonction se nomme NomFonction. Elle admet comme paramètres d'entrée (données) les m arguments $arge_1, \ldots, arge_m$ et comme paramètres de sortie (résultats) les n arguments $args_1, \ldots, args_n$. Ces derniers doivent être déterminés dans le corps de la fonction (partie instructions).
Dans le cas ou la fonction n'admet qu'un seul paramètre de sortie, l'écriture se simplifie :

Fonction $args \leftarrow$ NomFonction($arge_1, \ldots, arge_m$)
instructions
Fin

Ecrire ses propres fonctions

Pour écrire une fonction «propre», il faut tout d'abord déterminer exactement ce que devra faire cette fonction.

Puis, il faut pouvoir répondre à quelques questions :

1. Quelles sont les données (avec leurs limitations)?
2. Que doit-on calculer ?

et, ensuite la **commenter** : expliquer son usage, type des paramètres, ...

Exemple : résolution d'une équation du premier degré

Nous voulons écrire une fonction calculant la solution de l'équation

$$ax + b = 0,$$

où nous supposons que $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$. La solution de ce problème est donc

$$x = -\frac{b}{a}.$$

Les données de cette fonction sont $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$. Elle doit retourner $x = -\frac{b}{a}$ solution de $ax + b = 0$.

Algorithme 1.6 Exemple de fonction : Résolution de l'équation du premier degré $ax + b = 0$.

Données : a : nombre réel différent de 0
b : nombre réel.
Résultat : x : un réel.

1: **Fonction** $x \leftarrow$ REPD(a, b)
2: $x \leftarrow -b/a$
3: **Fin**

Remarque 1.3 Cette fonction est très simple, toutefois pour ne pas «alourdir» le code nous n'avons pas vérifié la validité des données fournies.

exercice 1 Ecrire un algorithme permettant de valider cette fonction.

Exemple : résolution d'une équation du second degré

Nous cherchons les solutions réelles de l'équation

$$ax^2 + bx + c = 0, \tag{1.1}$$ {eq-snd-degre}

où nous supposons que $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$ sont donnés.

Mathématiquement, l'étude des solutions réelles de cette équation nous amène à envisager trois cas suivant les valeurs du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$

- si $\Delta < 0$ alors les deux solutions sont complexes,
- si $\Delta = 0$ alors la solution est $x = -\frac{b}{2a}$,
- si $\Delta > 0$ alors les deux solutions sont $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2*a}$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2*a}$.

exercice 2 1. Ecrire la fonction `discriminant` permettant de calculer le discriminant de l'équation (1.1).

2. Ecrire la fonction `RESD` permettant de résoudre l'équation (1.1) en utilisant la fonction `discriminant`.
3. Ecrire un programme permettant de valider ces deux fonctions.

exercice 3 Même question que précédemment dans le cas complexe (solution et coefficients).

1.4 Méthodologie

1.4.1 Description du problème

- Spécification d'un ensemble de données
  Origine : énoncé,hypothèses, sources externes, ...
- Spécification d'un ensemble de buts à atteindre
  Origine : résultats, opérations à effectuer, ...
- Spécification des contraintes

1.4.2 Recherche d'une méthode de résolution

- Clarifier l'énoncé.
- Simplifier le problème.
- Ne pas chercher à le traiter directement dans sa globalité.
- S'assurer que le problème est soluble (sinon problème d'indécidabilité!)
- Recherche d'une stratégie de construction de l'algorithme
- Décomposer le problème en sous problèmes partiels plus simples : raffinement.
- Effectuer des raffinements successifs.
- Le niveau de raffinement le plus élémentaire est celui des instructions.

1.4.3 Réalisation d'un algorithme

Il doit être conçu indépendamment du langage de programmation et du système informatique (sauf cas très particulier)

- L'algorithme doit être exécuté en un nombre fini d'opérations.
- L'algorithme doit être spécifié clairement, sans la moindre ambiguïté.
- Le type de données doit être précisé.
- L'algorithme doit fournir au moins un résultat.
- L'algorithme doit être effectif : toutes les opérations doivent pouvoir être simulées par un homme en temps fini.

Pour écrire un algorithme détaillé, il faut tout d'abord savoir répondre a quelques questions :

- Que doit-il faire ? (i.e. Quel problème est-il censé résoudre?)
- Quelles sont les données necessaires à la résolution de ce problème?
- Comment résoudre ce problème «à la main» (sur papier)?

Si l'on ne sait pas répondre à l'une de ces questions, l'écriture de l'algorithme est fortement comprise.

Exemple : algorithme pour une somme

Exercice 1.4.1

Ecrire un algorithme permettant de calculer

$$S(x) = \sum_{k=1}^{n} k \sin(2kx)$$

Correction L'énoncé de cet exercice est imprécis. On choisi alors $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ pour rendre possible le calcul. Le problème est donc de calculer

$$\sum_{k=1}^{n} k \sin(2kx).$$

Toutefois, on aurait pu choisir $x \in \mathbb{C}$ ou encore un tout autre problème :

$$\text{Trouver } x \in \mathbb{R} \text{ tel que } S(x) = \sum_{k=1}^{n} k \sin(2kx)$$

où $n \in \mathbb{N}$ et S, fonction de $\mathbb{R}$ à valeurs réelles, sont les données!

Algorithme 1.7 Calcul de $S = \sum_{k=1}^{n} k \sin(2kx)$

Données : x : nombre réel,
n : nombre entier.
Résultat : S : un réel.

```
1: S ← 0
2: Pour k ← 1 à n faire
3:     S ← S + k * sin(2 * k * x)
4: Fin
```

◊

Exemple : algorithme pour un produit

Exercice 1.4.2

Ecrire un algorithme permettant de calculer

$$P(z) = \prod_{n=1}^{k} \sin(2kz/n)^k$$

Correction L'énoncé de cet exercice est imprécis. On choisi alors $z \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$ pour rendre possible le calcul.

Algorithme 1.8 Calcul de $P = \prod_{n=1}^{k} \sin(2kz/n)^k$

Données : z : nombre réel,
k : nombre entier.
Résultat : P : un réel.

```
1: P ← 1
2: Pour n ← 1 à k faire
3:     P ← P * sin(2 * k * z/n)^k
4: Fin
```

1 ◊

2 **Exemple : série de Fourier**

Exercice 1.4.3

{exo10}

Soit la série de Fourier

{SFT}

$$x(t) = \frac{4A}{\pi}\left\{\cos\omega t - \frac{1}{3}\cos 3\omega t + \frac{1}{5}\cos 5\omega t - \frac{1}{7}\cos 7\omega t + \cdots\right\}. \tag{1.2}$$

Notons $x_n(t)$ la série tronquée au n-ième terme. Ecrire la fonction SFT permettant de calculer $x_n(t)$.

3

Correction Nous devons écrire la fonction permettant de calculer

$$x_n(t) = \frac{4A}{\pi}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{1}{2k-1}\cos((2k-1)\omega t)$$

4 Les données de la fonction sont $A \in \mathbb{R}$, $\omega \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}$.

5 Grâce a ces renseignements nous pouvons déjà écrire l'entête de la fonction :

Algorithme 1.9 En-tête de la fonction SFT retournant valeur de la série de Fourier en t tronquée au n premiers termes de l'exercice 1.4.3.

Données : t : nombre réel,
n : nombre entier strictement positif
$A,\ \omega$: deux nombres réels.
Résultat : x : un réel.

```
1: Fonction x ← SFT( t, n, A, ω )
2:     ...
3: Fin
```

6 Maintenant nous pouvons écrire progressivement l'algorithme pour aboutir au final à une version ne
7 contenant que des opérations élémentaires.

Algorithme 1.10 $\mathcal{R}_0$

1: $x \leftarrow \frac{4A}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\left(\begin{array}{c}(-1)^{k+1}\frac{1}{2k-1}\times\\ \cos((2k-1)\omega t)\end{array}\right)$

Algorithme 1.10 $\mathcal{R}_1$

1: $S \leftarrow \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{1}{2k-1}\cos((2k-1)\omega t)$
2: $x \leftarrow \frac{4A}{\pi}S$

8

9

Algorithme 1.10 $\mathcal{R}_1$

1: $S \leftarrow \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{1}{2k-1} \cos((2k-1)\omega t)$

2: $x_n(t) \leftarrow \frac{4A}{\pi} S$

Algorithme 1.10 $\mathcal{R}_2$

1: $S \leftarrow 0$
2: **Pour** $k = 1$ **à** n **faire**
3: $\quad S \leftarrow S + (-1)^{k+1} \frac{1}{2k-1} * \cos((2k-1)\omega t)$
4: **Fin**
5: $x_n(t) \leftarrow \frac{4A}{\pi} S$

Finalement la fonction est

Algorithme 1.10 Fonction SFT retournant la valeur de la série de Fourier en t tronquée au n premiers termes de l'exercice 1.4.3.

Données : t : nombre réel,
n : nombre entier strictement positif
$A,\ \omega$: deux nombres réels.
Résultat : x : un réel.

```
1: Fonction x ← SFT( t,n,A,ω )
2:   S ← 0
3:   Pour k = 1 à n faire
4:     S ← S + ((-1)^(k+1)) * cos((2*k-1)*ω*t)/(2*k-1)
5:   Fin
6:   S ← 4*A*S/π
7: Fin
```

◊

Exercice 1.4.4

Reprendre les trois exercices précédents en utilisant les boucles «tant que».

1.5 Principes de «bonne» programmation pour attaquer de «gros» problèmes

Tous les exemples vus sont assez courts. Cependant, il peut arriver que l'on ait des programmes plus longs à écrire (milliers de lignes, voir des dizaines de milliers de lignes). Dans l'industrie, il arrive que des équipes produisent des codes de millions de lignes, dont certains mettent en jeux des vies humaines (contrôler un avion de ligne, une centrale nucléaire, ...). Le problème est évidemment d'écrire des programmes sûrs. Or, *un programme à* 100% *sûr, cela n'existe pas!* Cependant, plus un programme est simple, moins le risque d'erreur est grand : c'est sur cette remarque de bon sens que se basent les «bonnes» méthodes. Ainsi :

Tout problème compliqué doit être découpé en sous-problèmes plus simples

Il s'agit, lorsqu'on a un problème P à résoudre, de l'analyser et de le décomposer en un ensemble de problèmes P_1, P_2, P_3, ... plus simples. Puis, P_1, est lui-même analysé et décomposé en $P_{11}, P_{12}, \ldots$, et P_2 en P_{21}, P_{22}, etc. On poursuit cette analyse jusqu'à ce qu'on n'ait plus que des problèmes élémentaires à résoudre. Chacun de ces problèmes élémentaires est donc traité séparément dans un module, c'est à dire un morceau de programme relativement indépendant du reste. Chaque module sera *testé et validé* séparément dans la mesure du possible et naturellement *largement documenté*. Enfin ces modules élémentaires sont assemblés en modules de plus en plus complexes, jusqu'à remonter au problème initiale. A chaque niveau, il sera important de bien réaliser les phases de test, validation et documentation des modules.

Par la suite, on s'évertue à écrire des algorithmes!

Ceux-ci ne seront pas optimisés[a]!

[a] améliorés pour minimiser le nombre d'opérations élémentaires, l'occupation mémoire, ..

1

Chapitre 2

Méthodes Numériques

2.1 Polynôme d'interpolation de Lagrange

2.1.1 Définition

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_i, y_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ avec $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$ et les x_i distincts deux à deux. Le **polynôme d'interpolation de Lagrange** associé aux $n+1$ points $(x_i, y_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$, noté $\mathcal{P}_n$, est donné par

$$\mathcal{P}_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(t), \ \forall t \in \mathbb{R} \tag{2.1}$$ {Lagrange-eq0}

avec

$$L_i(t) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{t - x_j}{x_i - x_j}, \ \forall i \in [\![0,n]\!], \ \forall t \in \mathbb{R}. \tag{2.2}$$ {Lagrange-eq1}

Théorème 2.1 {LagrangePoly}

Le **polynôme d'interpolation de Lagrange**, $\mathcal{P}_n$, associé aux $n+1$ points $(x_i, y_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$, est l'unique polynôme de degré au plus n, vérifiant

$$\mathcal{P}_n(x_i) = y_i, \ \forall i \in [\![0,n]\!]. \tag{2.3}$$

A titre d'exemple, on représente, En figure 2.1, le polynôme d'interpolation de Lagrange associé à 7 points donnés.

Exercice 2.1.1

Ecrire la fonction LAGRANGE permettant de calculer $\mathcal{P}_n$ (polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux $n+1$ points $(x_i, y_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$) au point $t \in \mathbb{R}$.

Correction

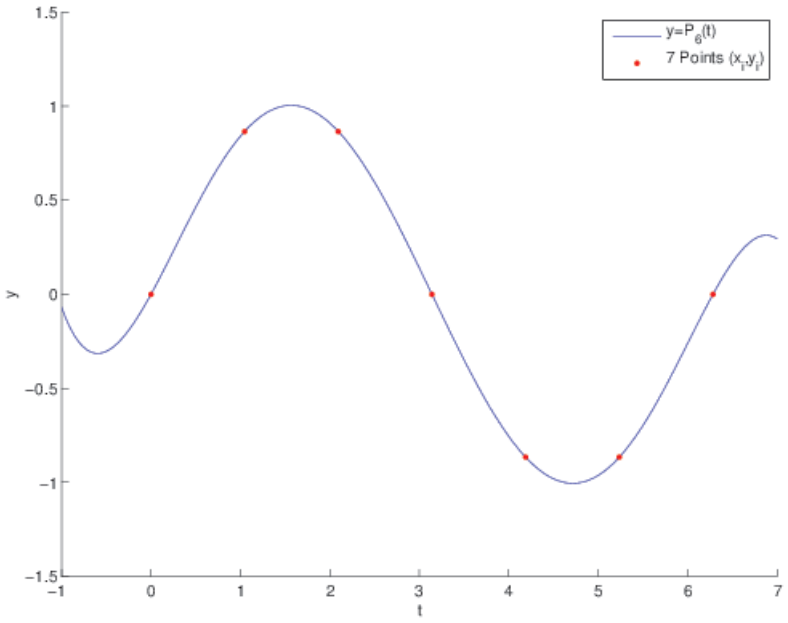


Figure 2.1: Polynôme d'interpolation de Lagrange avec 7 points donnés) `figPoly1`

But : Calculer le polynôme $\mathcal{P}_n(t)$ définit par (2.1)
Données : $\boldsymbol{X}$: vecteur/tableau de $\mathbb{R}^{n+1}$, $X(i) = x_{i-1}\ \forall i \in [\![1, n+1]\!]$ et $X(i) \neq X(j)$ pour $i \neq j$,
$\boldsymbol{Y}$: vecteur/tableau de $\mathbb{R}^{n+1}$, $Y(i) = y_{i-1}\ \forall i \in [\![1, n+1]\!]$,
t : un réel.
Résultat : y : le réel $y = \mathcal{P}_n(t)$.

Algorithme 2.1 $\mathcal{R}_0$

1: Calcul de $y = \mathcal{P}_n(t) = \sum_{i=1}^{n+1} Y(i) L_{i-1}(t)$

Algorithme 2.1 $\mathcal{R}_1$

1: $y \leftarrow 0$
2: **Pour** $i \leftarrow 1$ **à** $n+1$ **faire**
3: $\quad y \leftarrow y + Y(i) * L_{i-1}(t)$
4: **Fin**

Algorithme 2.1 $\mathcal{R}_1$

1: $y \leftarrow 0$
2: **Pour** $i \leftarrow 1$ **à** $n+1$ **faire**
3: $\quad y \leftarrow y + Y(i) * L_{i-1}(t)$
4: **Fin**

Algorithme 2.1 $\mathcal{R}_2$

1: $y \leftarrow 0$
2: **Pour** $i \leftarrow 1$ **à** $n+1$ **faire**
3: $\quad L \leftarrow \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} \frac{t - X(j)}{X(i) - X(j)}$
4: $\quad y \leftarrow y + Y(i) * L$
5: **Fin**

Algorithme 2.1 $\mathcal{R}_2$

1: $y \leftarrow 0$
2: **Pour** $i \leftarrow 1$ **à** $n+1$ **faire**
3: $L \leftarrow \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n+1} \frac{t - X(j)}{X(i) - X(j)}$
4: $y \leftarrow y + Y(i) * L$
5: **Fin**

Algorithme 2.1 $\mathcal{R}_3$

1: $y \leftarrow 0$
2: **Pour** $i \leftarrow 1$ **à** $n+1$ **faire**
3: $L \leftarrow 1$
4: **Pour** $j \leftarrow 1$ **à** $n+1$ **faire**
5: **Si** $i \sim= j$ **alors**
6: $L \leftarrow L * (t - X(j))/(X(i) - X(j))$
7: **Fin**
8: **Fin**
9: $y \leftarrow y + Y(i) * L$
10: **Fin**

On obtient alors l'algorithme final

Algorithme 2.1 Fonction LAGRANGE permettant de calculer le polynôme d'interpolation de Lagrange $\mathcal{P}_n(x)$ définit par (2.1)

Données : $\boldsymbol{X}$: vecteur/tableau de $\mathbb{R}^{n+1}$, $X(i) = x_{i-1}\ \forall i \in [\![1, n+1]\!]$ et $X(i) \neq X(j)$ pour $i \neq j$,
$\boldsymbol{Y}$: vecteur/tableau de $\mathbb{R}^{n+1}$, $Y(i) = y_{i-1}\ \forall i \in [\![1, n+1]\!]$,
t : un réel.
Résultat : y : le réel $y = \mathcal{P}_n(t)$.

1: **Fonction** $y \leftarrow$ LAGRANGE$(\ t, X, Y\ )$
2: $y \leftarrow 0$
3: **Pour** $i \leftarrow 1$ **à** $n+1$ **faire**
4: $L \leftarrow 1$
5: **Pour** $j \leftarrow 1$ **à** $n+1$ **faire**
6: **Si** $i \sim= j$ **alors**
7: $L \leftarrow L * (t - X(j))/(X(i) - X(j))$
8: **Fin**
9: **Fin**
10: $y \leftarrow y + Y(i) * L$
11: **Fin**
12: **return** y
13: **Fin**

◊

2.1.2 Erreur de l'interpolation

Soit une fonction $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$. On suppose que les y_i sont donnés par

$$y_i = f(x_i), \quad \forall i \in [\![0, n]\!]. \tag{2.4}$$

On cherche à évaluer l'erreur $E_n(t) = f(x) - \mathcal{P}_n(t)$, $\forall t \in [a, b]$.

On propose en figures 2.2 à 2.4 d'etudier deux exemples. Le premier (figure de gauche) correspond à l'interpolation de la fonction $\sin(t)$ par le polynôme d'interpolation de Lagrange aux points équidistants $t_i = a + ih$ avec $a = 0$ et $h = 2\pi/n$. Le second (figure de droite) correspond à l'interpolation de la fonction $\frac{1}{1+t^2}$ par le polynôme d'interpolation de Lagrange aux points $x_i = a + ih$ avec $a = -5$ et $h = 10/n$.

Le résultat suivant est du à Cauchy (1840)

Théorème 2.2

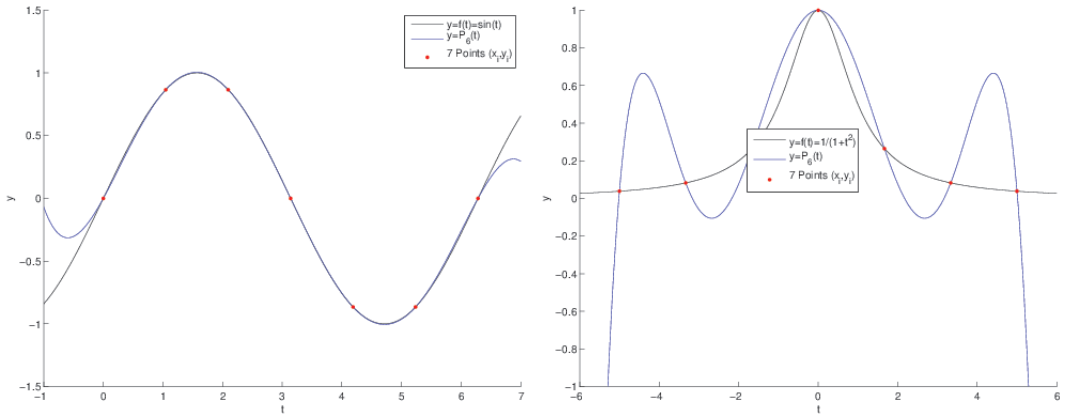


Figure 2.2: Erreurs d'interpolation avec $n = 6$ `figPoly6`

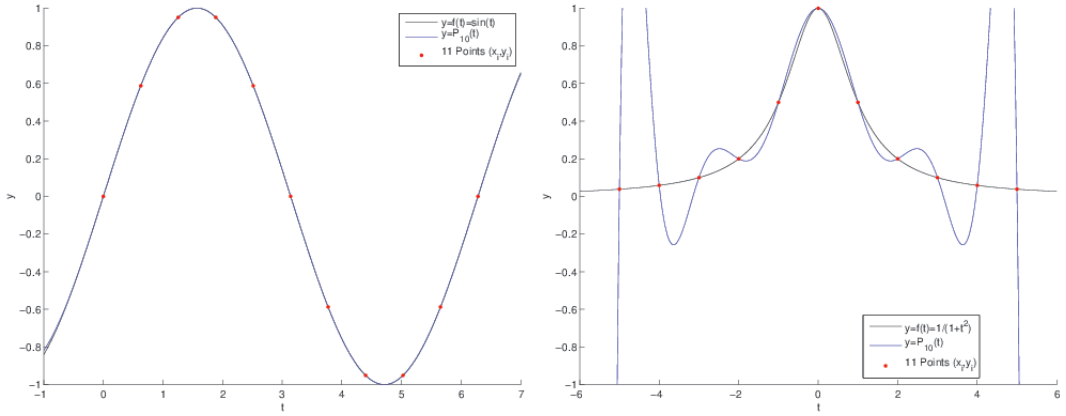


Figure 2.3: Erreurs d'interpolation avec $n = 10$ `figPoly10`

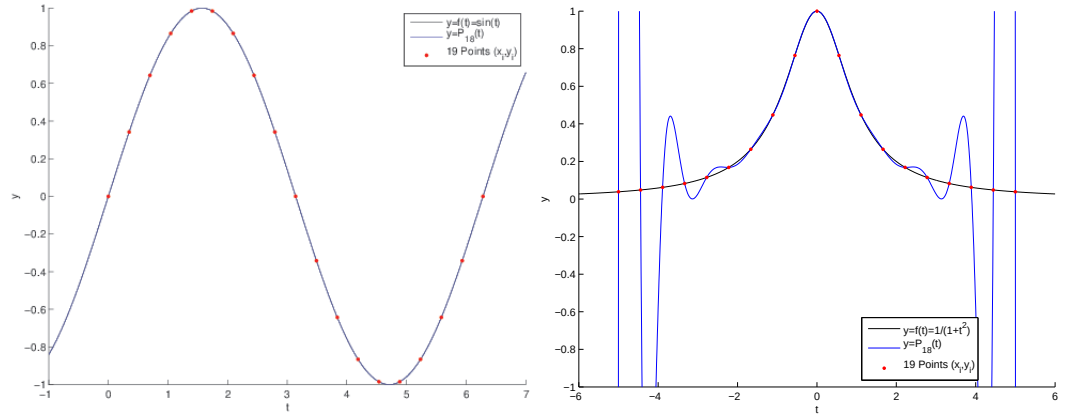


Figure 2.4: Erreurs d'interpolation avec $n = 18$ `figPoly18`

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, une fonction $(n+1)$-fois différentiable et soit $\mathcal{P}_n(t)$ le polynôme d'interpolation de degré n passant par $(x_i, f(x_i)),\ \forall i \in [\![0,n]\!]$. Alors, {LagrangeCauchy}

$$\forall t \in [a,b],\ \exists \xi_t \in (min(x_i,t), max(x_i,t)),\quad f(t) - \mathcal{P}_n(t) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_t)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(t-x_i) \qquad (2.5)$$

2.1.3 Points de Chebyshev

Pour minimiser l'erreur commise lors de l'interpolation d'une fonction f par un polynôme d'interpolation de Lagrange, on peut, pour un n donné, "jouer" sur le choix des points x_i :
Trouver $(\bar{x}_i)_{i=0}^n$, $\bar{x}_i \in [a,b]$, distincts deux à deux, tels que

$$\max_{t\in[a,b]} \prod_{i=0}^{n} |t-\bar{x}_i| \leqslant \max_{t\in[a,b]} \prod_{i=0}^{n} |t-x_i|,\ \forall (x_i)_{i=0}^n,\ x_i \in [a,b],\ \text{distincts 2 à 2} \qquad (2.6)$$ {eqpoly10}

On a alors le résultat suivant

Théorème 2.3

Les points réalisant (2.6) sont les points de Chebyshev donnés par

$$\bar{x}_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\cos\left(\frac{(2i+1)\pi}{2n+2}\right),\ \forall i \in [\![0,n]\!]. \qquad (2.7)$$ {eqpoly11}

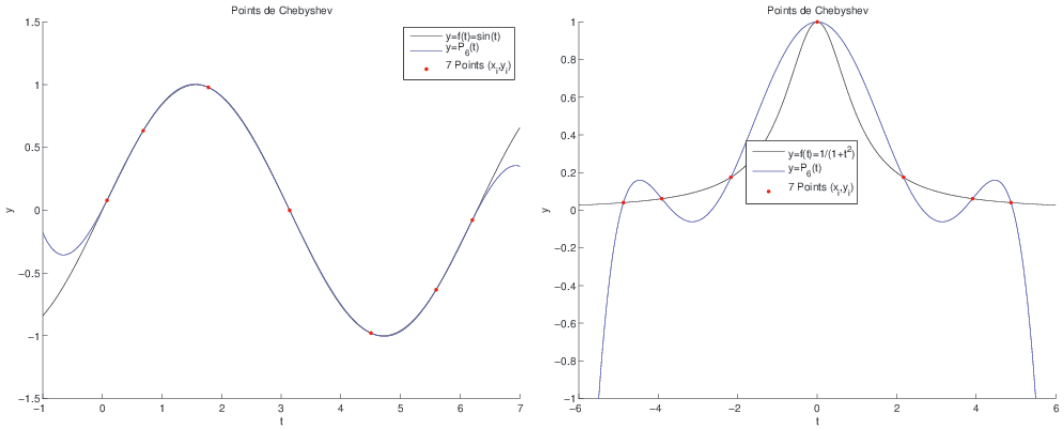


Figure 2.5: Erreurs d'interpolation avec $n = 6$ figPolyCheb6

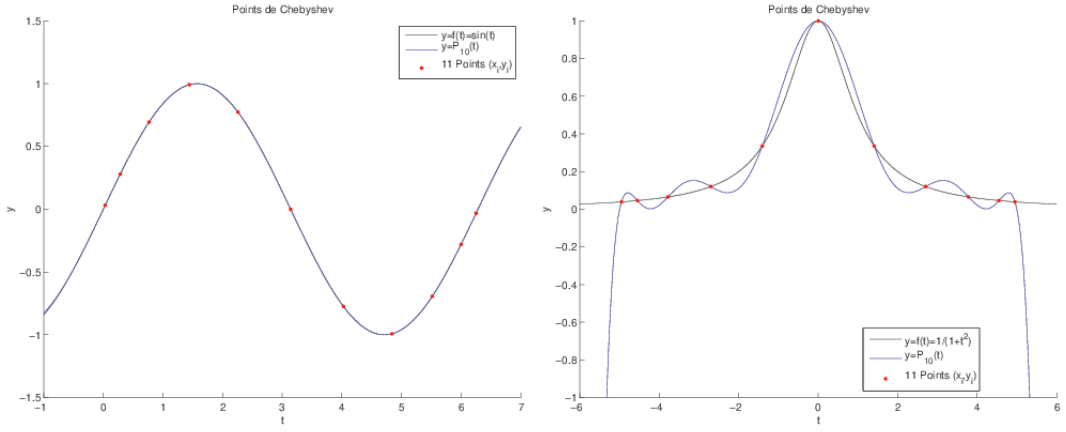


Figure 2.6: Erreurs d'interpolation avec $n = 10$ `figPolyCheb10`

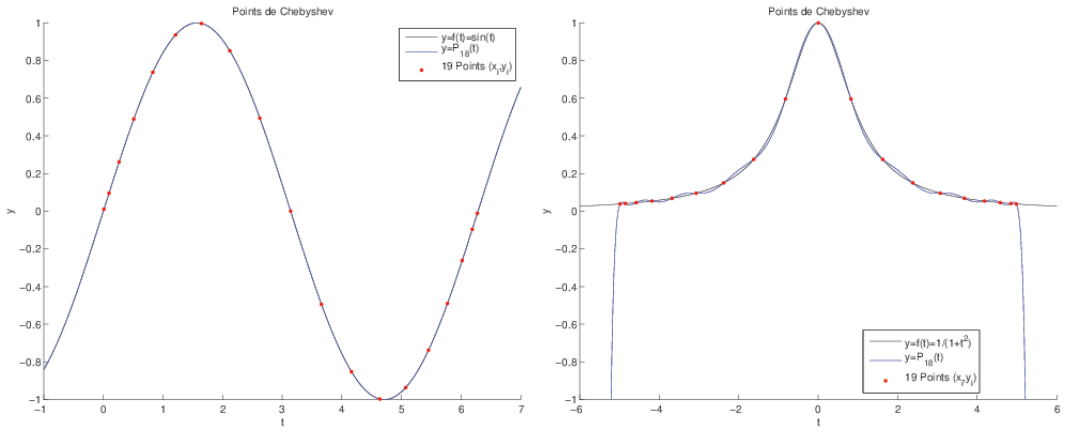


Figure 2.7: Erreurs d'interpolation avec $n = 18$ `figPolyCheb18`

2.2 Dérivation numérique

2.2.1 Développement de Taylor

Théorème 2.4: Taylor-Lagrange

On suppose que $f \in \mathcal{C}^{n+1}$ sur I. Alors, pour tout $h \in \mathbb{R}$ tel que $x+h$ appartienne à I, il existe $\theta_h \in]0,1[$ tel que l'on ait

$$f(x+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(x) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x+\theta_h h) \tag{2.8}$$ {eq:TaylorLagrange}

Il est possible d'écrire ce développement de Taylor de manière plus concise en utilisant la notion de *grand O* notée $\mathcal{O}()$ rappelée ici

Definition 2.5

Soit g une fonction. On dit que g **se comporte comme un grand O de** h^q quand h tend vers 0 si et seulement si il existe $H > 0$ et $C > 0$ tel que

$$|g(h)| \leqslant Ch^q, \quad \forall h \in]-H, H[.$$

On note alors $g(h) = \mathcal{O}(h^q)$.

L'équation (2.8) s'écrit alors sous la forme équivalente

$$f(x+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(x) + \mathcal{O}(h^{n+1}) \tag{2.9}$$ {eq:TaylorLagran

ou en développant

$$f(x+h) = f(x) + hf^{(1)}(x) + \frac{h^2}{2!} f^{(2)}(x) + \ldots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x) + \mathcal{O}(h^{n+1}) \tag{2.10}$$ {eq:TaylorLagran

Nous allons par la suite *jouer* avec ces formules en utilisant différentes valeurs pour h. Pour faciliter leur obtention on peut écrire le développement de Taylor en $x + \square$ ou $\square$ pourra prendre les valeurs $h, 2h, -h, \ldots$

$$f(x+\square) = f(x) + \square f^{(1)}(x) + \frac{\square^2}{2!} f^{(2)}(x) + \ldots + \frac{\square^n}{n!} f^{(n)}(x) + \mathcal{O}(\square^{n+1}) \tag{2.11}$$ {eq:TaylorLagran

2.2.2 Approximations de dérivées premières

On propose de chercher une approximation de la dérivée première de f en un point $x \in]a,b[$. On rappelle que la dérivée d'une fonction est définie par

Definition 2.6

Une fonction f définie sur un intervalle $[a,b]$ est dérivable en un point $x \in]a,b[$ si la limite suivante existe et est finie

$$f'(x) = lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(f(x+h) - f(x) \tag{2.12}$$ {defderivee}

On peut donc approcher $f'(x)$, pour h suffisament petit par $\frac{1}{h}(f(x+h) - f(x)$. On en déduit alors les deux approximations, pour $h > 0$,

différence finie progressive :

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{2.13}$$ {DFP}

différence finie rétrograde :

$$f'(x) \approx \frac{f(x) - f(x-h)}{h} \tag{2.14}$$ {DFR}

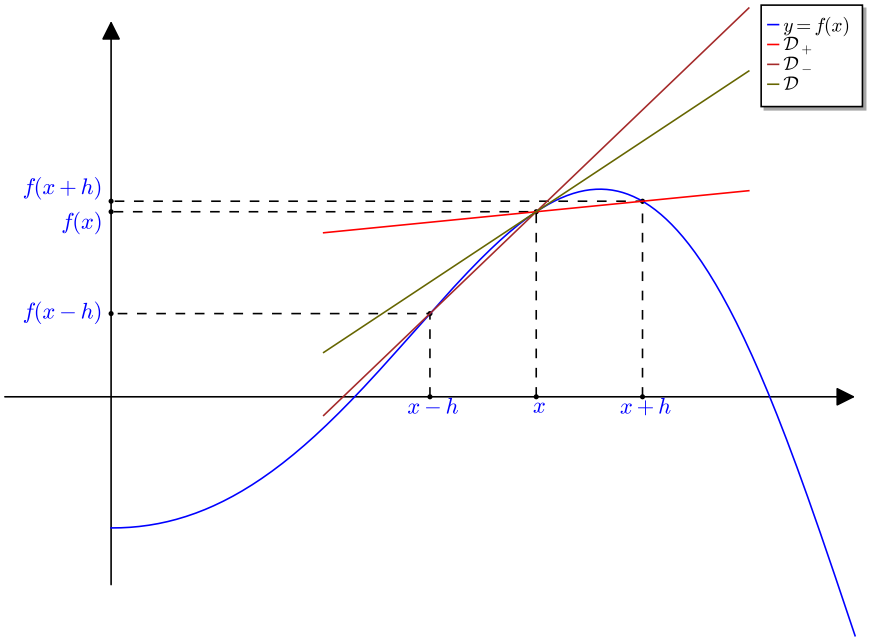


Figure 2.8: Réprésentation de $\mathcal{D}_+$, droite de pente $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ passant par $(x, f(x))$, de $\mathcal{D}_-$, droite de pente $\frac{f(x)-f(x-h)}{h}$ passant par $(x, f(x))$ et $\mathcal{D}$ droite de pente $f'(x)$ passant par $(x, f(x))$

Pour estimer l'erreur pour (2.13), on utilise le développement de Taylor (2.8). En effet, si $f \in \mathcal{C}^2(]a, b[)$, on a

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2} f^{(2)}(\xi^+)$$

avec $\xi^+ \in]\min(x, x+h), \max(x, x+h)[$. On obtient alors

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) + \frac{h}{2} f^{(2)}(\xi^+).$$

L'erreur commise lorsque l'on approche $f'(x)$ par $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ est :

$$f'(x) - \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{h}{2} f^{(2)}(\xi^+) = \mathcal{O}(h).$$

De même pour (2.14), si $f \in \mathcal{C}^2(]a, b[)$, il existe $\xi^- \in]\min(x, x-h), \max(x, x-h)[$ tel que

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{(-h)^2}{2} f^{(2)}(\xi^-).$$

On obtient alors

$$\frac{f(x) - f(x-h)}{h} = f'(x) - \frac{h}{2} f^{(2)}(\xi^-).$$

L'erreur commise lorsque l'on approche $f'(x)$ par $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ est :

$$f'(x) - \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = -\frac{h}{2} f^{(2)}(\xi^-) = \mathcal{O}(h).$$

1 **Definition 2.7**

On dit qu'une formule de dérivation numérique est d'ordre p si l'erreur se comporte comme un $\mathcal{O}(h^p)$.

Lemme 2.8

Les formules de dérivation (2.13) et (2.14) sont d'ordre 1

Il est aussi possible d'obtenir ces approximations en dérivant les polynômes d'interpolation associés aux points $\{x, x+h\}$ et $\{x-h, x\}$.

Exercice 2.2.1

On note $x_i = a + ih$, $i \in [\![0, n]\!]$, une discrétisation régulière de l'intervalle $[a, b]$. Soit une fonction $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ suffisament régulière. On suppose que les y_i sont donnés par

$$y_i = f(x_i), \quad \forall i \in [\![0, n]\!]. \tag{2.15}$$

Ecrire une fonction DERIVE1 permettant de calculer des approximations d'ordre 1 de $f'(x_i)$ pour $i \in [\![0, n]\!]$.

Correction Exercice On note $x_i = a + ih$, $i \in [\![0, n]\!]$, une discrétisation régulière de l'intervalle $[a, b]$. Soit une fonction $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ suffisament régulière. On suppose que les y_i sont donnés par

$$y_i = f(x_i), \quad \forall i \in [\![0, n]\!]. \tag{2.16}$$

Ecrire une fonction DERIVE1 permettant de calculer des approximations d'ordre 1 de $f'(x_i)$ pour $i \in [\![0, n]\!]$.

Nous avons $n+1$ valeurs à déterminer : l'ensemble des $f'(x_i)$ pour $i \in [\![0, n]\!]$. Ces valeurs seront stockées dans un tableau $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $\boldsymbol{v}(i+1)$ contiendra une approximation d'ordre 1 de $f'(x_i)$.

Nous allons par exemple utiliser la formule progressive pour calculer les n permier termes $f'(x_i)$ (i.e. pour i allant de 0 à $n-1$). Il n'est pas possible de calculer $f'(x_n)$ avec cette formule car le point suivant x_{n+1} n'est pas donné/fourni. Pour cette dernière valeur, on utilisera alors la formule régréssive. En résumé :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}(i+1) &= \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} \approx f'(x_i), \quad \forall i \in [\![0, n[\![\\ \boldsymbol{v}(n+1) &= \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{h} = \frac{y_n - y_{n-1}}{h} \approx f'(x_n). \end{aligned}$$

Le choix des données peut-être considéré comme imprecis dans l'ennoncé de cet exercice : on peut donc *choisir* celles qui nous semblent les plus judicieuses. Dans l'algorithme 2.2, on choisit les données minimales : les y_i pour $i \in [\![0, n]\!]$ et h. Une autre version proposée par l'algorithme 2.3, consiste à prendre des données plus *parlantes* : a, b et n pour la discrétisation de l'intervalle et la fonction f.

Algorithme 2.2 Fonction DERIVE1 permettant de calculer des approximations d'ordre 1 de dérivées {algo:Derive1}

Données : $\boldsymbol{Y}$: vecteur/tableau de $\mathbb{R}^{n+1}$, $\boldsymbol{Y}(i+1) = y_i \ \forall i \in [\![0, n]\!]$,
h : un réel.
Résultat : $\boldsymbol{v}$: vecteur/tableau de $\mathbb{R}^{n+1}$,

1: **Fonction** $\boldsymbol{v} \leftarrow$ DERIVE1($\boldsymbol{Y}, h$)
2: **Pour** $i \leftarrow 1$ **à** n **faire**
3: $\boldsymbol{v}(i) \leftarrow \frac{\boldsymbol{Y}(i+1) - \boldsymbol{Y}(i)}{h}$
4: **Fin**
5: $\boldsymbol{v}(n+1) \leftarrow \frac{\boldsymbol{Y}(n+1) - \boldsymbol{Y}(n)}{h}$
6: **Fin**

Algorithme 2.3 Fonction DERIVE1 permettant de calculer des approximations d'ordre 1 de dérivées {algo:Deri

Données : a, b : deux réels $a < b$
n : un entier positif
f : une fonction, $f : [a, d] \longrightarrow \mathbb{R}$
Résultat : $\boldsymbol{v}$: vecteur/tableau de $\mathbb{R}^{n+1}$,

1: **Fonction** $\boldsymbol{v} \leftarrow$ DERIVE1(f, a, b, n)
2: $\boldsymbol{X} \leftarrow$ DISREG(a, b, n)
3: $h \leftarrow (b-a)/n$
4: $\boldsymbol{Y} \leftarrow f(\boldsymbol{X})$
5: **Pour** $i \leftarrow 1$ **à** n **faire**
6: $\boldsymbol{v}(i) \leftarrow \frac{\boldsymbol{Y}(i+1)-\boldsymbol{Y}(i)}{h}$
7: **Fin**
8: $\boldsymbol{v}(n+1) \leftarrow \frac{\boldsymbol{Y}(n+1)-\boldsymbol{Y}(n)}{h}$
9: **Fin**

1 ◇

2

3 Pour améliorer la précision il faut trouver de nouvelles formules d'approximation d'ordre plus élevé.
4 Pour obtenir une formule d'approximation d'ordre 2 de $f'(x)$, on suppose $f \in \mathcal{C}^3(]a, b[)$ et on peut alors
5 développer les formules de Taylor de $f(x+h)$ et $f(x-h)$ jusqu'au troisième ordre : $\exists \xi_+ \in]x, x+h[$,
6 $\exists \xi_- \in]x-h, x[$,.

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2} f^{(2)}(x) + \frac{h^3}{3!} f^{(3)}(\xi_+) \tag{2.17}$$

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2} f^{(2)}(x) - \frac{h^3}{3!} f^{(3)}(\xi_-) \tag{2.18}$$

En soustrayant ces deux équations, on obtient alors

$$f(x+h) - f(x-h) = 2hf'(x) + \frac{h^3}{3!}(f^{(3)}(\xi_+) + f^{(3)}(\xi_-))$$

ce qui donne

$$f'(x) + \frac{h^2}{12}(f^{(3)}(\xi_+) + f^{(3)}(\xi_-)) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}.$$

7 Une approximation à l'ordre de 2 de $f'(x)$ est donnée par

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}. \tag{2.19}$$

8 Cette approximation est la formule des **différences finies centrées**.

Exercice 2.2.2

On note $x_i = a + ih$, $i \in [\![0, n]\!]$, une discrétisation régulière de l'intervalle $[a, b]$. Soit une fonction $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ suffisament régulière. On suppose que les y_i sont donnés par

$$y_i = f(x_i), \quad \forall i \in [\![0, n]\!]. \tag{2.20}$$

Ecrire une fonction DERIVE2 permettant de calculer des approximations d'ordre 2 de $f'(x_i)$ pour
9 $i \in [\![0, n]\!]$.

10 **Correction** Pour les points x_i, $i \in [\![1, n-1]\!]$, on utilise la formule des différences finies centrées.
11 Cette dernière n'est pas utilisable pour $i = 0$ et $i = n$. Il faut donc trouver d'autres formules d'ordre 2.

12 • En $\bar{x} = x_0$, on développe les formules de Taylor de $f(\bar{x}+h)$ et $f(\bar{x}+2h)$ jusqu'au troisième ordre :
13 $\exists \xi_1 \in]\bar{x}, \bar{x}+h[$, $\exists \xi_1 \in]\bar{x}, \bar{x}+2h[$,.

$$f(\bar{x}+h) = f(\bar{x}) + hf'(\bar{x}) + \frac{h^2}{2} f^{(2)}(\bar{x}) + \frac{h^3}{3!} f^{(3)}(\xi_1)$$

$$f(\bar{x}+2h) = f(\bar{x}) + 2hf'(\bar{x}) + \frac{(2h)^2}{2} f^{(2)}(\bar{x}) + \frac{(2h)^3}{3!} f^{(3)}(\xi_2)$$

ce qui donne

$$f'(\bar{x}) + \frac{h}{2}f^{(2)}(\bar{x}) + \frac{h^2}{6}f^{(3)}(\xi_1) = \frac{f(\bar{x}+h) - f(\bar{x})}{h} \quad (2.21)$$

$$f'(\bar{x}) + hf^{(2)}(\bar{x}) + \frac{(2h)^2}{3!}f^{(3)}(\xi_2) = \frac{f(\bar{x}+2h) - f(\bar{x})}{2h} \quad (2.22)$$

On effectue la combinaison linéaire 2(2.21)-(2.22) pour éliminer le terme en h^1 et on obtient

$$\begin{aligned} f'(\bar{x}) + 2\frac{h^2}{6}f^{(3)}(\xi_1) - \frac{(2h)^2}{3!}f^{(3)}(\xi_2) &= 2\frac{f(\bar{x}+h) - f(\bar{x})}{h} - \frac{f(\bar{x}+2h) - f(\bar{x})}{2h} \\ &= -\frac{f(\bar{x}+2h) - 4f(\bar{x}+h) + 3f(\bar{x})}{2h} \end{aligned}$$

Une approximation à l'ordre 2 de $f'(\bar{x})$ utilisant les valeurs de f aux points $\{\bar{x}, \bar{x}+h, \bar{x}+2h\}$ est donnée par

$$f'(\bar{x}) = -\frac{f(\bar{x}+2h) - 4f(\bar{x}+h) + 3f(\bar{x})}{2h} + O(h^2). \quad (2.23)$$

- En $\bar{x} = x_n$, on développe les formules de Taylor de $f(\bar{x}-h)$ et $f(\bar{x}-2h)$ jusqu'au troisième ordre : $\exists \xi_1 \in]\bar{x}-h, \bar{x}[$, $\exists \xi_2 \in]\bar{x}-2h, \bar{x}[$,.

$$\begin{aligned} f(\bar{x}-h) &= f(\bar{x}) - hf'(\bar{x}) + \frac{h^2}{2}f^{(2)}(\bar{x}) - \frac{h^3}{3!}f^{(3)}(\xi_1) \\ f(\bar{x}-2h) &= f(\bar{x}) - 2hf'(\bar{x}) + \frac{(2h)^2}{2}f^{(2)}(\bar{x}) - \frac{(2h)^3}{3!}f^{(3)}(\xi_2) \end{aligned}$$

ce qui donne

$$f'(\bar{x}) - \frac{h}{2}f^{(2)}(\bar{x}) + \frac{h^2}{6}f^{(3)}(\xi_1) = \frac{f(\bar{x}) - f(\bar{x}-h)}{h} \quad (2.24) \quad \{\text{DerExo02:eq3}\}$$

$$f'(\bar{x}) - hf^{(2)}(\bar{x}) + \frac{(2h)^2}{3!}f^{(3)}(\xi_2) = \frac{f(\bar{x}) - f(\bar{x}-2h)}{2h} \quad (2.25) \quad \{\text{DerExo02:eq4}\}$$

On effectue la combinaison linéaire 2(2.24)-(2.25) pour éliminer le terme en h^1 et on obtient

$$\begin{aligned} f'(\bar{x}) + 2\frac{h^2}{6}f^{(3)}(\xi_1) - \frac{(2h)^2}{3!}f^{(3)}(\xi_2) &= 2\frac{f(\bar{x}) - f(\bar{x}-h)}{h} - \frac{f(\bar{x}) - f(\bar{x}-2h)}{2h} \\ &= \frac{3f(\bar{x}) - 4f(\bar{x}-h) + f(\bar{x}-2h)}{2h} \end{aligned}$$

Une approximation à l'ordre 2 de $f'(\bar{x})$ utilisant les valeurs de f aux points $\{\bar{x}, \bar{x}-h, \bar{x}-2h\}$ est donnée par

$$f'(\bar{x}) = \frac{3f(\bar{x}) - 4f(\bar{x}-h) + f(\bar{x}-2h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2). \quad (2.26)$$

$\Diamond$

2.2.3 Approximations de dérivées seconde

Il est possible aussi d'obtenir des approximations de dérivées d'ordre supérieure. Par exemple, pour obtenir une approximation de $f^{(2)}(x)$, on suppose $f \in \mathcal{C}^4(]a,b[)$ et on peut alors développer les formules de Taylor de $f(x+h)$ et $f(x-h)$ jusqu'au quatrième ordre : $\exists \xi_+ \in]x, x+h[$, $\exists \xi_- \in]x-h, x[$,.

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f^{(2)}(x) + \frac{h^3}{3!}f^{(3)}(x) + \frac{h^4}{4!}f^{(4)}(\xi_+) \quad (2.27)$$

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f^{(2)}(x) - \frac{h^3}{3!}f^{(3)}(x) + \frac{h^4}{4!}f^{(4)}(\xi_-) \quad (2.28)$$

(2.29)

En sommant ces deux équations, on obtient alors

$$f(x+h)+f(x-h)=2f(x)+h^2f^{(2)}(x)+\frac{h^4}{4!}(f^{(4)}(\xi_+)+f^{(4)}(\xi_-))$$

ce qui donne

$$f^{(2)}(x)+\frac{h^2}{4!}(f^{(4)}(\xi_+)+f^{(4)}(\xi_-))=\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}.$$

Une approximation à l'ordre 2 de $f^{(2)}(x)$ est donnée par

$$\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}. \tag{2.30}$$

Exercice 2.2.3

On note $x_i = a+ih$, $i \in [\![0,n]\!]$, une discrétisation régulière de l'intervalle $[a,b]$. Soit une fonction $f:[a,b]\longrightarrow \mathbb{R}$ suffisament régulière. On suppose que les y_i sont donnés par

$$y_i = f(x_i), \quad \forall i \in [\![0,n]\!]. \tag{2.31}$$

Ecrire une fonction DERIVESECONDE2 permettant de calculer des approximations d'ordre 2 de $f^{(2)}(x_i)$ pour $i \in [\![1,n-1]\!]$.

2.3 Intégration numérique

Soit f une fonction définie et intégrable sur un intervalle $[a,b]$ donné. On propose de chercher une approximation de

$$I=\int_a^b f(x)dx$$

dans le cas où l'on ne connait pas de primitive de f.

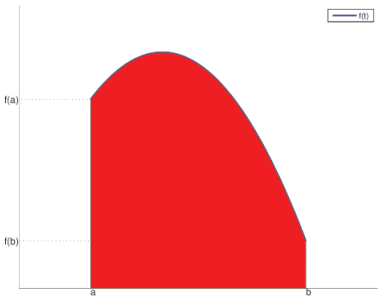


Figure 2.9: Représentation de $\int_a^b f(x)dx$ (aire en rouge)

Définition 2.9 On dit qu'une formule d'intégration (ou formule de quadrature) est d'ordre n ou a pour **degré d'exactitude** n si elle est exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à n.

2.3.1 Méthodes simpliste

On peut approcher f par un polynôme constant. Les trois formules usuels sont

Méthode du rectangle à gauche : En figure 2.10, on représente l'approximation de $\int_a^b f(x)dx$ lorsque f est approché par le polynôme constant $P(x)=f(a)$. On a alors

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)f(a), \text{ formule du rectangle (à gauche)}$$

et son degré d'exactitue est 0.

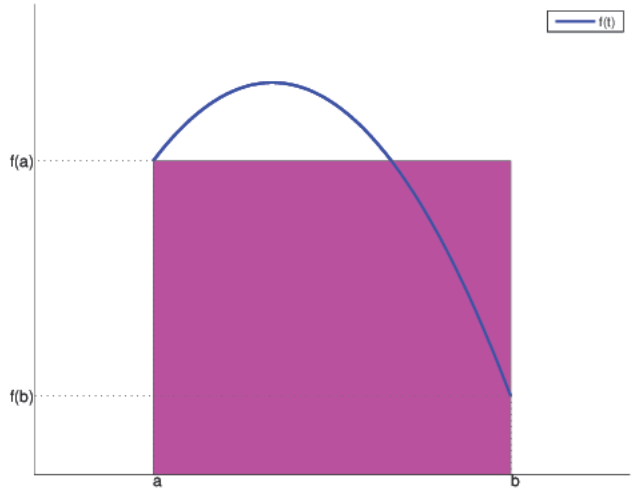


Figure 2.10: Formule du rectangle à gauche : $\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b f(a)dx$ IntFigRG

Méthode du rectangle à droite : En figure 2.11, on représente l'approximation de $\int_a^b f(x)dx$ lorsque f est approché par le polynôme constant $P(x) = f(b)$. On a alors

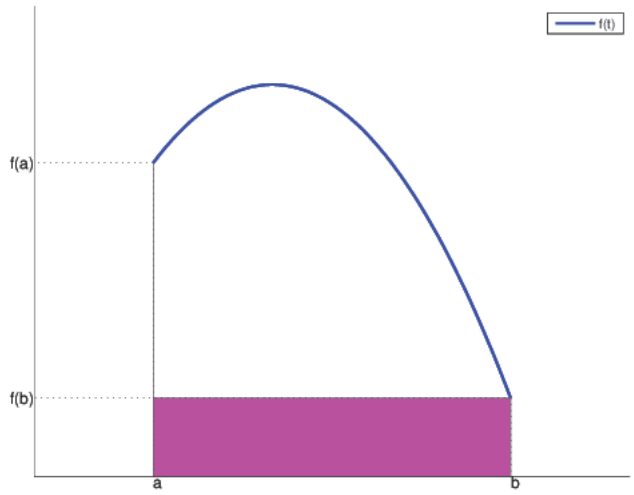


Figure 2.11: Formule du rectangle à droite : $\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b f(b)dx$ IntFigRD

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)f(b), \text{ formule du rectangle (à droite)}$$

et son degré d'exactitue est 0.

Méthode du point milieu : En figure 2.12, on représente l'approximation de $\int_a^b f(x)dx$ lorsque f est approché par le polynôme constant $P(x) = f((a+b)/2)$. On a alors

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right), \text{ formule du point milieu}$$

et son degré d'exactitue est 1.

La précision de ces formules est toute relative!

2.3.2 Méthodes de Newton-Cotes

Soit $(x_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ une discrétisation régulière de l'intervalle $[a,b]$: $x_i = a + ih$ avec $h = (b-a)/n$.

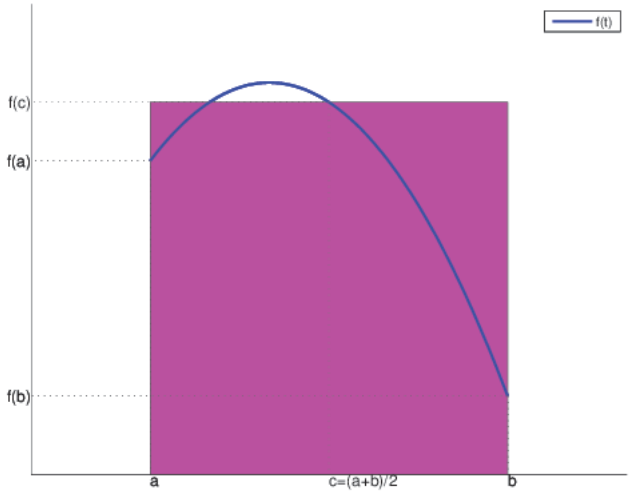


Figure 2.12: Formule du point milieu : $\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b f((a+b)/2)dx$ IntFigPM

Sur l'intervalle $[a,b]$, on approche f par son polynôme d'interpolation $\mathcal{P}_n$ aux points $(x_i, f(x_i))_{i\in[\![0,n]\!]}$. D'après (2.1), on a

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x) f(x_i)$$

et, en utilisant le théorème 2.2, on obtient

$$\forall x \in [a,b],\ \exists \xi_x \in [a,b],\quad f(x) - \mathcal{P}_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \tag{2.32}$$

On a donc

$$\int_a^b f(x)dx - \int_a^b \mathcal{P}_n(x)dx = \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)dx. \tag{2.33}$$

De plus

$$\int_a^b \mathcal{P}_n(x)dx = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \int_a^b L_i(x)dx. \tag{2.34}$$

Les formules de Newton-Cotes s'écrivent sous la forme

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(x_i)$$

où $\alpha_i = \int_a^b L_i(x)dx$. En posant $\alpha_i = hAw_i$, on a le tableau suivant

n	A	w_0	w_1	w_2	w_3	w_4	nom	ordre
1	1/2	1	1				trapèzes	1
2	1/3	1	4	1			Simpson	3
3	3/8	1	3	3	1		Simpson	3
4	2/45	7	32	12	32	7	Villarceau	5

Par exemple, la formule de Simpson ($n = 2$) est

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)\right) \tag{2.35}$$

egrationSimpson}

Pour un n donné, déterminer les coefficients α_i de la formule de Newton-Cotes est assez simple. En effet, il suffit de remarquer que la formule doit être exacte si f est un polynôme de degré au plus n. Ensuite par linéarité de la formule, on est ramené à résoudre une système linéaire à n inconnues (les α_i) en écrivant que pour chaque monôme

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(x_i) = \int_a^b f(x)dx,\ \forall f \in \{1, X, X^2, \ldots, X^n\}.$$

Par exemple, pour $n = 2$, on a $b = a + 2h$ et les trois équations :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 & = & 2h,\ (f(x) = 1) \\ a\alpha_0 + (a+h)\alpha_1 + (a+2h)\alpha_2 & = & \int_a^b x dx = 2ah + 2h^2,\ (f(x) = x) \\ a^2\alpha_0 + (a+h)^2\alpha_1 + (a+2h)^2\alpha_2 & = & \int_a^b x^2 dx = \frac{1}{3}(6a^2h + 12ah^2 + 8h^3),\ (f(x) = x^2). \end{array}\right.$$

On a alors

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha_0 = -\alpha_1 - \alpha_2 + 2h, \\ a(-\alpha_1 - \alpha_2 + 2h) + (a+h)\alpha_1 + (a+2h)\alpha_2 = 2ah + 2h^2, \\ a^2(-\alpha_1 - \alpha_2 + 2h) + (a+h)^2\alpha_1 + (a+2h)^2\alpha_2 = \frac{1}{3}(6a^2h + 12ah^2 + 8h^3). \end{array}\right.$$

c'est à dire

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha_0 = -\alpha_1 - \alpha_2 + 2h, \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 = 2h, \\ 2ah(\alpha_1 + 2\alpha_2) + h^2(\alpha_1 + 4\alpha_2) = 4ah^2 + 8h^3/3, \end{array}\right.$$

Par substitution, de la deuxième équation dans la troisième, on obtient enfin

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha_0 = -\alpha_1 - \alpha_2 + 2h, \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 = 2h, \\ \alpha_1 + 4\alpha_2 = 8h/3, \end{array}\right.$$

ce qui donne $\alpha_0 = \alpha_2 = h/3$ et $\alpha_1 = 4h/3$.

Pour les méthode de Newton-Cotes, il ne faut pas trop "monter" en ordre car le phénomène de Runge (forte oscillation possible du polynôme d'interpolation sur les bords de l'intervalle) peut conduire à de très grande erreurs.

2.3.3 Méthodes composites

Ces méthodes consistent en l'utilisation de la relation de Chasles pour décomposer l'intégrale en une somme d'intégrales sur des domaines plus petits puis sur ces dernières on applique une formule d'intégration numérique.

Soit $(x_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ une discrétisation régulière de l'intervalle $[a,b]$: $x_k = a + kh$ avec $h = (b-a)/n$. On a alors

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx.$$

Formule composite des points milieux

On note $m_k = \frac{x_{k-1}+x_k}{2}$ le point milieu de l'intervalle $[x_{k-1}, x_k]$. On approche alors chacune des intégrales par la formule des points milieux

$$\int_{I_k} f(x)dx \approx hf(m_k)$$

pour obtenir

$$\int_a^b f(x)dx = h\sum_{k=1}^{n} f(m_k) + \mathcal{O}(h^2). \tag{2.36}$$

C'est une formule d'ordre 2 par rapport à h.

Exercice 2.3.1

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[a,b]$. Ecrire la fonction QUADPM permettant de calculer une approximation de l'intégrale de f sur $[a,b]$ par la méthode composite des points milieux.

2.3.4 Formule composite des trapèzes

On approche chacune des intégrales par la formule des trapèzes

$$\int_{I_k} f(x)dx \approx h(\frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2})$$

pour obtenir

$$\int_a^b f(x)dx = h\sum_{k=1}^{n}(\frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}) + \mathcal{O}(h^2). \tag{2.37}$$

C'est une formule d'ordre 2 par rapport à h.

Exercice 2.3.2

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[a,b]$. Ecrire la fonction QuadTrapeze permettant de calculer une approximation de l'intégrale de f sur $[a,b]$ par la méthode composite des trapèzes.

2.3.5 Formule composite de Simpson

On approche chacune des intégrales par la formule de Simpson (ordre 3)

$$\int_{I_k} f(x)dx \approx \frac{h}{6}(f(x_{k-1}) + 4f(m_k) + f(x_k))$$

pour obtenir

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{6}\sum_{k=1}^{n}(f(x_{k-1}) + 4f(m_k) + f(x_k)) + \mathcal{O}(h^4). \tag{2.38}$$

C'est une formule d'ordre 4 par rapport à h.

Exercice 2.3.3

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[a,b]$. Ecrire la fonction QuadSimpson permettant de calculer une approximation de l'intégrale de f sur $[a,b]$ par la méthode composite de Simpson.

Il est possible de "retrouver" numériquement l'ordre des différentes méthodes en représentant en échelle logarithmique (en abscisses et ordonnées) la fonction erreur $h \to erreur(h)$ pour chacune des méthodes. Par exemple, pour la méthode composite de Simpson, on a vu que pour un h donné (i.e. un n donné)

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{6}\sum_{k=1}^{n}(f(x_{k-1}) + 4f(m_k) + f(x_k)) + Ch^4$$

où C est indépendant de h.
L'erreur E_{Simpson} de la méthode s'écrit donc

$$E_{\text{Simpson}}(h) = Ch^4.$$

De plus $\log(E(h)) = \log(C) + 4\log(h)$, donc en échelle logarithmique, on va représenter $\log(h) \to \log(E_{\text{Simpson}}(h))$ qui est une droite de pente 4. En figure 2.13, on représente en échelle logarithmique les différentes erreurs ainsi que les fonctions $h \to h^2$ et $h \to h^4$.

2.3.6 Autres méthodes

Il existe un grand nombre de méthodes d'intégration numérique :

- méthode de Gauss-Legendre,
- méthode de Gauss-Tchebychev,

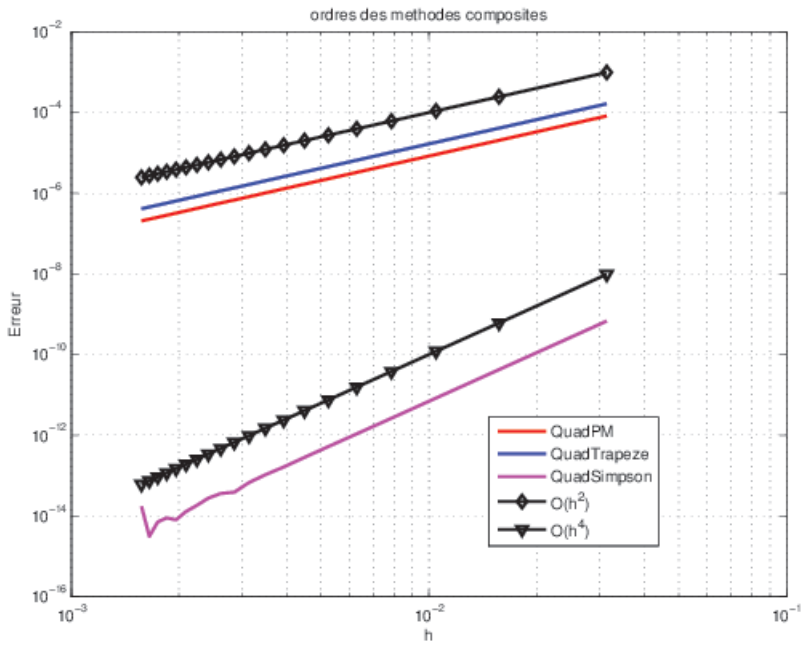


Figure 2.13: Ordre des méthodes composites pour le calcul de $\int_0^\pi \sin(x)dx$ | `IntegrationOrdre`

- méthode de Gauss-Laguerre,
- méthode de Gauss-Hermitte,
- méthode de Gauss-Lobatto,
- méthode de Romberg...

2.3.7 Intégrales multiples

On veut approcher, en utilisant la formule de Simpson, l'intégrale

$$I = \int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx$$

Par utilisation de la formule de quadrature de Simpson (2.35) en y on a

$$g(x) = \int_c^d f(x,y)dy \approx \tilde{g}(x) = \frac{d-c}{6}\left(f(x,c) + 4f(x,\frac{c+d}{2}) + f(x,d)\right).$$

Une nouvelle utilisation de Simpson en x donne

$$\begin{aligned} I = \int_a^b g(x)dx &\approx \frac{b-a}{6}\left(g(a) + 4g(\frac{a+b}{2}) + g(b)\right) \\ &\approx \frac{b-a}{6}\left(\tilde{g}(a) + 4\tilde{g}(\frac{a+b}{2}) + \tilde{g}(b)\right) \end{aligned}$$

En posant $\alpha = \frac{a+b}{2}$ et $\beta = \frac{c+d}{2}$, on obtient la formule de quadrature de Simpson "2D" :

$$I \approx \frac{b-a}{6}\frac{d-c}{6}\begin{pmatrix} f(a,c) + 4f(a,\beta) + f(a,d) \\ +4(f(\alpha,c) + 4f(\alpha,\beta) + f(\alpha,d)) \\ +f(b,c) + 4f(b,\beta) + f(b,d) \end{pmatrix} \quad (2.39)$$

La méthodologie pour obtenir la formule composite de Simpson "2D" est la suivante

1. Discrétisation régulière de $[a,b]$: $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $x_k = a + kh_x$ avec $h_x = \frac{b-a}{n}$.

2. Discrétisation régulière de $[c,d]$: $\forall l \in [\![0,m]\!]$, $y_l = a + lh_y$ avec $h_y = \frac{d-c}{m}$.

3. Relation de Chasles :

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \int_{y_{l-1}}^{y_l} f(x,y)dydx.$$

4. Formule composite de Simpson "2D" :

$$\begin{array}{c} \int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx \\ = \\ \frac{h_x h_y}{36} \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m} \left(\begin{array}{l} f(x_{k-1},y_{l-1}) + 4f(x_{k-1},\beta_l) + f(x_{k-1},y_l) \\ +4(f(\alpha_k,y_{l-1}) + 4f(\alpha_k,\beta_l) + f(\alpha_k,y_l)) \\ +f(x_k,y_{l-1}) + 4f(x_k,\beta_l) + f(x_k,y_l) \end{array} \right) \end{array}$$

avec $\alpha_k = \frac{x_{k-1}+x_k}{2}$ et $\beta_l = \frac{y_{l-1}+y_l}{2}$.

2.4 Algèbre linéaire

Dans cette partie, on suppose le lecteur avoir quelques connaissances en algèbre linéaire. De plus, du point de vue algorithmique, on suppose l'existence des types matrices et vecteurs.

2.4.1 Vecteurs

Exercice 2.4.1

Soient $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Ecrire la fonction VecAXPY permettant de calculer $\boldsymbol{z} = \alpha\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$.

Correction On pose $\boldsymbol{z} = \alpha\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$. $\boldsymbol{z}$ est un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et

$$z_i = \alpha x_i + y_i, \ \forall i \in [\![1,n]\!].$$

On donne ici, à titre d'exemple, les raffinements succesifs pour obtenir l'algorithme final

Algorithme 2.4 $\mathcal{R}_0$

1: Calculer $\boldsymbol{z} \leftarrow \alpha\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$.

Algorithme 2.4 $\mathcal{R}_1$

1: **Pour** $i \leftarrow 1$ **à** n **faire**
2: $z_i \leftarrow \alpha x_i + y_i$
3: **Fin**

On abouti alors à

Algorithme 2.4 Fonction VecAXPY retournant $\boldsymbol{z} = \alpha\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ avec $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ et $\alpha \in \mathbb{R}$

Données : $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$: deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$
α : un réel.
Résultat : $\boldsymbol{z}$: vecteur de $\mathbb{R}^n$.

1: **Fonction** $\boldsymbol{z} \leftarrow$ VecAXPY($\alpha, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$)
2: **Pour** $i \leftarrow 1$ **à** n **faire**
3: $z(i) \leftarrow \alpha * x(i) + y(i)$
4: **Fin**
5: **Fin**

◊

Remarque 2.5 1. On a fait le choix de ne pas mettre comme donnée explicite l'entier n. En effet, on peut considérer que l'entier n est donné implicitement par les vecteurs $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$.

2. Aucun test sur les dimensions des vecteurs et le type des données n'est réalisé afin de ne pas «alourdir» l'algorithme : on suppose donc que cette fonction sera correctement utilisée, c'est à dire que les hypothèses sur les données seront bien vérifiées.

Exercice 2.5.1

Soient $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

1. Ecrire la fonction VecDot permettant de calculer le produit scalaire entre les vecteurs $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$.
2. Ecrire la fonction VecNorm1 permettant de calculer

$$\|\boldsymbol{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \ \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n. \tag{2.40}$$ {VECNORMUn}

3. Ecrire la fonction VecNorm2 permettant de calculer

$$\|\boldsymbol{x}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{1/2}, \ \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Correction

1. On a, $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, $\forall \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$,

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Algorithme 2.5 Fonction VecDot permettant de calculer le produit scalaire des vecteurs $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ où $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ et $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$.

Données :
$\boldsymbol{x}$: vecteur de $\mathbb{R}^n$,
$\boldsymbol{y}$: vecteur de $\mathbb{R}^n$.
Résultat : s : le réel tel que $s = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$.

1: **Fonction** $s \leftarrow$ VecDot($\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$)
2: $s \leftarrow 0$
3: **Pour** $i \leftarrow 1$ **à** n **faire**
4: $s \leftarrow s + x(i) * y(i)$
5: **Fin**
6: **Fin**

2. On a, $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$,

$$\|\boldsymbol{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|.$$

Algorithme 2.6 Fonction VecNorm1 permettant de retourner $\|\boldsymbol{x}\|_1$ avec $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$

Données :
$\boldsymbol{x}$: vecteur de $\mathbb{R}^n$.
Résultat :
s : le réel tel que $s = \|\boldsymbol{x}\|_1$.

1: **Fonction** $s \leftarrow$ VecNorm1($\boldsymbol{x}$)
2: $s \leftarrow 0$
3: **Pour** $i = 1$ **à** n **faire**
4: $s \leftarrow s+$ABS$(x(i))$
5: **Fin**
6: **Fin**

3. On a

$$\|\boldsymbol{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle^{1/2}.$$

Algorithme 2.7 Fonction VecNorm2 permettant de retourner $\|\boldsymbol{x}\|_2$ avec $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$

Données :
$\boldsymbol{x}$: vecteur de $\mathbb{R}^n$.
Résultat :
s : le réel tel que $s = \|\boldsymbol{x}\|_2$.

```
1: Fonction s ← VecNorm2( x )
2:    s ← 0
3:    Pour i ← 1 à n faire
4:       s ← s + x(i) * x(i)
5:    Fin
6:    s ←sqrt(s)
7: Fin
```

ou encore en utilisant la fonction VecDot :

Algorithme 2.8 Fonction VecNorm2 permettant de retourner $\|\boldsymbol{x}\|_2$ avec $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ (utilise la fonction VecDot).

Données :
$\boldsymbol{x}$: vecteur de $\mathbb{R}^n$.
Résultat :
s : le réel tel que $s = \|\boldsymbol{x}\|_2$.

```
1: Fonction s ← VecNorm2( x )
2:    s ←sqrt(VecDot(x,x))
3: Fin
```

◊

2.5.1 Matrices

Exercice 2.5.2

Soient $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ deux matrices de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ Ecrire la fonction MatAXPY permettant de retourner $\mathbb{Z} = \alpha\mathbb{X} + \mathbb{Y}$.

Correction On note $Z_{i,j}$ les composantes de la matrice $\mathbb{Z} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. On a alors

$$\forall i \in [\![1, m]\!],\ \forall i \in [\![1, n]\!],\quad Z_{i,j} = \alpha X_{i,j} + Y_{i,j}.$$

Algorithme 2.9 Fonction MATAXPY permettant de retourner $\mathbb{Z} = \alpha\mathbb{X} + \mathbb{Y}$ avec $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ dans $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, et $\alpha \in \mathbb{R}$

Données :
α : un réel,
$\mathbb{X}$: matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$,
$\mathbb{Y}$: matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.
Résultat :
$\mathbb{Z}$: matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ tel que $\mathbb{Z} = \alpha\mathbb{X} + \mathbb{Y}$.

```
1: Fonction Z ← MATAXPY( α, X, Y )
2:   Pour i ← 1 à m faire
3:     Pour j ← 1 à n faire
4:       Z(i,j) ← α * X(i,j) + Y(i,j)
5:     Fin
6:   Fin
7: Fin
```

◊ 1

Exercice 2.5.3

Ecrire la fonction MATTRANSPOSE permettant de retourner la transposé d'une matrice. 2

Correction Soit $\mathbb{X} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{Z} = \mathbb{X}^t$ la transposée de $\mathbb{X}$. Alors $\mathbb{Z} \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ et

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ \forall i \in [\![1,m]\!],\quad Z_{i,j} = X_{j,i}.$$

Algorithme 2.10 Fonction MATTRANSPOSE permettant de retourner $\mathbb{Z} = \mathbb{X}^t$ avec $\mathbb{X} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$

Données :
$\mathbb{X}$: matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.
Résultat :
$\mathbb{Z}$: matrice de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ tel que $\mathbb{Z} = \mathbb{X}^t$.

```
1: Fonction Z ← MATTRANSPOSE( X )
2:   Pour i ← 1 à n faire
3:     Pour j ← 1 à m faire
4:       Z(i,j) ← X(j,i)
5:     Fin
6:   Fin
7: Fin
```

◊ 3

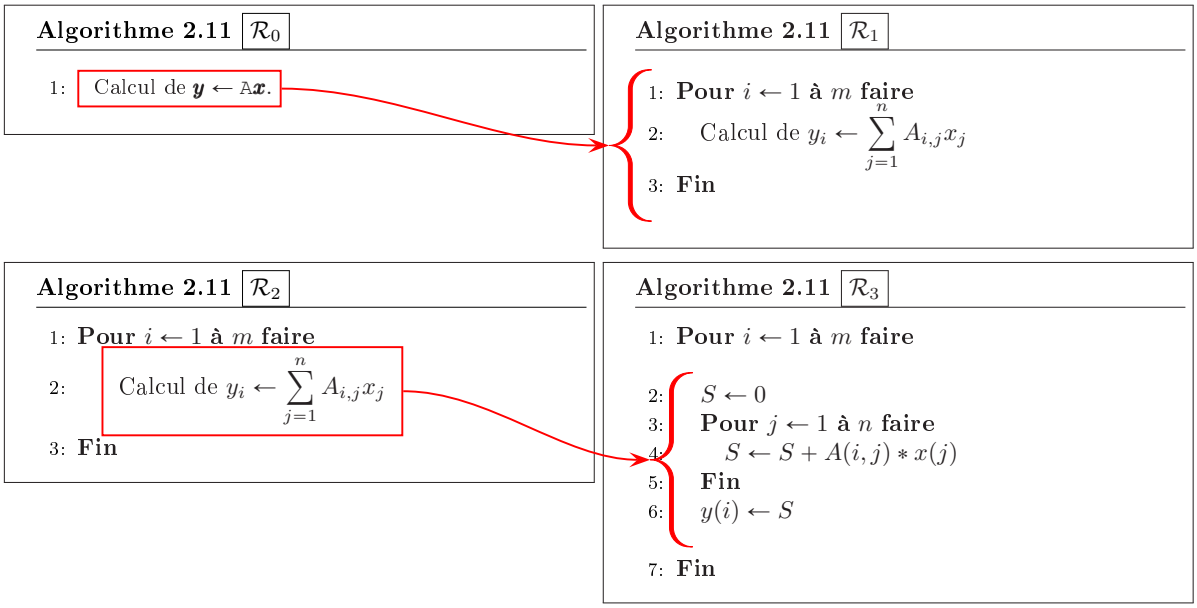
Exercice 2.5.4

Ecrire la fonction MATMULT permettant de retourner le produit d'une matrice par un vecteur. 4

Correction On rappelle que le produit d'une matrice $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ par un vecteur $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur de $\mathbb{R}^m$. On le note $\boldsymbol{y}$ et on a

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} A_{i,j}x_j,\ \forall i \in [\![1,m]\!],$$

On écrit en détail les raffinements successifs permettant d'aboutir à l'algorithme final de telle manière que le passage entre deux raffinements successifs soit le plus simple possible. 5 6



On obtient alors

Algorithme 2.11 Fonction MATMULT permettant de retourner le vecteur $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m$ tel que:

$$\boldsymbol{y} = \mathbb{A}\boldsymbol{x}$$

avec $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$

Données :
$\mathbb{A}$: matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$,
$\boldsymbol{x}$: vecteur de $\mathbb{R}^n$.
Résultat :
$\boldsymbol{y}$: vecteur de $\mathbb{R}^m$ tel que $\boldsymbol{y} = \mathbb{A}\boldsymbol{x}$.

```
1: Fonction x ← MatMult( A, x )
2:   Pour i ← 1 à m faire
3:     S ← 0
4:     Pour j ← 1 à n faire
5:       S ← S + A(i, j) * x(j)
6:     Fin
7:     y(i) ← S
8:   Fin
9: Fin
```

◊

Exercice 2.5.5

Ecrire la fonction MATMATMULT permettant de retourner le produit de deux matrices.

Correction Soient $\mathbb{X} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{Y} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On note $\mathbb{Z} \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{R})$ la matrice produit i.e. $\mathbb{Z} = \mathbb{X}\mathbb{Y}$.

On rappelle que l'on a

$$Z_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} X_{i,k}Y_{k,j}, \ \forall (i,j) \in [\![1,m]\!] \times [\![1,p]\!].$$

On écrit en détail les raffinements successifs permettant d'aboutir à l'algorithme final de telle manière que le passage entre deux raffinements successifs soit le plus simple possible.

Algorithme 2.12 $\mathcal{R}_0$

1: Calcul de Z = XY.

Algorithme 2.12 $\mathcal{R}_1$

1: **Pour** $i \leftarrow 1$ **à** m **faire**
2: Calcul de la ligne i de la matrice $\mathbb{Z}$
3: **Fin**

Algorithme 2.12 $\mathcal{R}_2$

1: **Pour** $i \leftarrow 1$ **à** m **faire**
2: Calcul de la ligne i de la matrice Z
3: **Fin**

Algorithme 2.12 $\mathcal{R}_3$

1: **Pour** $i \leftarrow 1$ **à** m **faire**
2: **Pour** $j \leftarrow 1$ **à** p **faire**
3: Calcul de $Z_{i,j} \leftarrow \sum_{k=1}^{n} X_{i,k}Y_{k,j}$
4: **Fin**
5: **Fin**

Algorithme 2.12 $\mathcal{R}_4$

1: **Pour** $i \leftarrow 1$ **à** m **faire**
2: **Pour** $j \leftarrow 1$ **à** p **faire**
3: Calcul de $Z_{i,j} \leftarrow \sum_{k=1}^{n} X_{i,k}Y_{k,j}$
4: **Fin**
5: **Fin**

Algorithme 2.12 $\mathcal{R}_5$

1: **Pour** $i \leftarrow 1$ **à** m **faire**
2: **Pour** $j \leftarrow 1$ **à** p **faire**
3: $S \leftarrow 0$
4: **Pour** $k \leftarrow 1$ **à** n **faire**
5: $S \leftarrow S + X_{i,k}Y_{k,j}$
6: **Fin**
7: $Z_{i,j} \leftarrow S$
8: **Fin**
9: **Fin**

On obtient alors

Algorithme 2.12 Fonction MatMatMult permettant de retourner la matrice $\mathbb{Z} \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{R})$ tel que $\mathbb{Z} = \mathbb{X}\mathbb{Y}$ avec $\mathbb{X} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{Y} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

Données :
$\mathbb{X}$: matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$,
$\mathbb{Y}$: matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.
Résultat :
$\mathbb{Z}$: matrice de $\mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{R})$ telle que $\mathbb{Z} = \mathbb{X}\mathbb{Y}$.

1: **Fonction** $\mathbb{Z} \leftarrow$ MatMatMult($\mathbb{X}, \mathbb{Y}$)
2: **Pour** $i \leftarrow 1$ **à** m **faire**
3: **Pour** $j \leftarrow 1$ **à** p **faire**
4: $S \leftarrow 0$
5: **Pour** $k \leftarrow 1$ **à** n **faire**
6: $S \leftarrow S + X(i,k) * Y(k,j)$
7: **Fin**
8: $Z(i,j) \leftarrow S$
9: **Fin**
10: **Fin**
11: **Fin**

◊

Exercice 2.5.6

Ecrire la fonction MatNorm1 permettant de retourner la norme d'une matrice $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$

$$\|\mathbb{A}\|_1 = \max_{j\in[\![1,n]\!]} \left(\sum_{i=1}^{m} |A_{i,j}| \right).$$

Correction Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. On écrit en détail les raffinements successifs permettant d'aboutir à l'algorithme final de telle manière que le passage entre deux raffinements successifs soit le plus simple possible.

Algorithme 2.13 $\mathcal{R}_0$

1: Calcul de $x = \|\mathbb{A}\|_1$.

Algorithme 2.13 $\mathcal{R}_1$

1: $x \leftarrow 0$
2: **Pour** $j \leftarrow 1$ **à** n **faire**
3: $\quad x \leftarrow \max\left(x, \sum_{i=1}^{m} |A_{i,j}|\right)$
4: **Fin**

Algorithme 2.13 $\mathcal{R}_2$

1: $x \leftarrow 0$
2: **Pour** $j \leftarrow 1$ **à** n **faire**
3: $\quad x \leftarrow \max\left(x, \sum_{i=1}^{m} |A_{i,j}|\right)$.
4: **Fin**

Algorithme 2.13 $\mathcal{R}_3$

1: $x \leftarrow 0$
2: **Pour** $j \leftarrow 1$ **à** n **faire**
3: $\quad S \leftarrow \sum_{i=1}^{m} |A_{i,j}|$
4: $\quad$ **Si** $x < S$ **alors**
5: $\quad\quad x \leftarrow S$
6: $\quad$ **Fin**
7: **Fin**

Algorithme 2.13 $\mathcal{R}_4$

1: $x \leftarrow 0$
2: **Pour** $j \leftarrow 1$ **à** n **faire**
3: $\quad S \leftarrow \sum_{i=1}^{m} |A_{i,j}|$
4: $\quad$ **Si** $x < S$ **alors**
5: $\quad\quad x \leftarrow S$
6: $\quad$ **Fin**
7: **Fin**

Algorithme 2.13 $\mathcal{R}_5$

1: $x \leftarrow 0$
2: **Pour** $j \leftarrow 1$ **à** n **faire**
3: $\quad S \leftarrow 0$
4: $\quad$ **Pour** $i \leftarrow 1$ **à** m **faire**
5: $\quad\quad S \leftarrow S + \mathrm{abs(A_{i,j})}$
6: $\quad$ **Fin**
7: $\quad$ **Si** $x < S$ **alors**
8: $\quad\quad x \leftarrow S$
9: $\quad$ **Fin**
10: **Fin**

On obtient alors

Algorithme 2.13 Fonction MatNorm1 permettant de retourner la norme 1 de la matrice $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ donnée par :

$$\|\mathbb{A}\|_1 = \max_{j\in[\![1,n]\!]} \left(\sum_{i=1}^{m} |A_{i,j}| \right).$$

Données :
$\mathbb{A}$: matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.
Résultat :
x : un réel tel que $x = \|\mathbb{A}\|_1$.

```
1: Fonction x ← MatNorm1( A )
2:   M ← 0
3:   Pour j ← 1 à n faire
4:     S ← 0
5:     Pour i ← 1 à m faire
6:       S ← S + abs(A(i,j))
7:     Fin
8:     Si M < S alors
9:       M ← S
10:    Fin
11:  Fin
12:  x ← M
13: Fin
```

◊

2.6 Résolution de systèmes linéaires (intro)

L'objection de cette introduction est de résoudre le système linéaire $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ par la *méthode de Gauss-Jordan*. Cette méthode est l'une des plus ancienne et il existe à l'heure actuelle une très grande variété de méthodes que l'on peut classer globalement dans les méthodes directes ou les méthodes itératives.

Avant de nous attaquer à cette méthode, nous allons regarder quelques cas particuliers : la matrice du système est diagonale, triangulaire inférieure ou triangulaire supérieure.

2.6.1 Matrices particulières

{RSL:subsec:MP

Matrices diagonales

Soit $\mathbb{A}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonale inversible et $\boldsymbol{b} \in \mathbb{K}^n$. Dans ce cas les coefficients diagonaux de $\mathbb{A}$ sont tous non nuls et l'on a

$$x_i = b_i/A_{i,i}, \quad \forall i \in [\![1, n]\!]. \tag{2.41}$$

On a immédiatement l'algorithme

Algorithme 2.14 Fonction RSLMatDiag permettant de résoudre le système linéaire à matrice diagonale inversible

$$\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}.$$

{algo:RSL:Diag

Données : $\mathbb{A}$: matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible.
$\boldsymbol{b}$: vecteur de $\mathbb{R}^n$.
Résultat : $\boldsymbol{x}$: vecteur de $\mathbb{R}^n$.

```
1: Fonction x ← RSLMatDiag ( A, b )
2:   Pour i ← 1 à n faire
3:     x(i) ← b(i)/A(i,i)
4:   Fin
5: Fin
```

Matrices triangulaires inférieures

Soit $\mathbb{A}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire inférieure inversible et $\boldsymbol{b} \in \mathbb{K}^n$. On veut résoudre le système linéaire

$$\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \iff \begin{pmatrix} A_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ A_{n,1} & \dots & \dots & A_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

On remarque que l'on peut calculer successivement $x_1, x_1, \dots, x_n$, car il est possible de calculer x_i si on connait $x_1, \dots, x_{i-1}$: c'est la **méthode de descente**. En effet, on a

$$(\mathbb{A}\boldsymbol{x})_i = b_i, \ \forall i \in [\![1, n]\!].$$

et donc, par définition d'un produit matrice-vecteur,

$$\sum_{j=1}^{n} A_{i,j} x_j = b_i, \ \forall i \in [\![1, n]\!].$$

Comme $\mathbb{A}$ est une matrice triangulaire inférieure, on a (voir Définition **??**) $A_{i,j} = 0$ si $j > i$. Ceci donne alors pour tout $i \in [\![1, n]\!]$

$$\begin{aligned} b_i &= \sum_{j=1}^{i-1} A_{i,j} x_j + A_{i,i} x_i + \sum_{j=i+1}^{n} \underbrace{A_{i,j}}_{=0} x_j \\ &= \sum_{j=1}^{i-1} A_{i,j} x_j + A_{i,i} x_i \end{aligned}$$

De plus la matrice $\mathbb{A}$ étant triangulaire inversible ses éléments diagonaux sont tous non nuls. On obtient alors x_i en fonction des $x_{i+1}, \dots, x_n$:

$$x_i = \frac{1}{A_{i,i}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} A_{i,j} x_j \right), \ \forall i \in [\![1, n]\!]. \tag{2.42}$$

On écrit en détail les raffinements successifs permettant d'aboutir à l'Algorithme 2.15 final ne comportant que des opérations élémentaires(.... à finaliser) de telle sorte que le passage entre deux raffinements successifs soit le plus compréhensible possible.

Algorithme 2.15 $\mathcal{R}_0$

1: Résoudre $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ en calculant successivement $x_1, \ x_2, \ \dots, x_n$.

Algorithme 2.15 $\mathcal{R}_1$

1: **Pour** $i \leftarrow 1$ **à** n **faire**
2: $\quad x_i \leftarrow \dfrac{1}{A_{i,i}} \left(b_i - \displaystyle\sum_{j=1}^{i-1} A_{i,j} x_j \right)$
3: **Fin**

Dans le raffinement $\mathcal{R}_1$, la seule difficulté restante est le calcul de la somme $\displaystyle\sum_{j=1}^{i-1} A_{i,j} x_j$. En effet, l'opérateur mathématique $\sum$ n'est pas défini dans notre langage algorithmique : il va donc falloir détailler un peu plus l'algorithme. Pour isoler le calcul de cette somme, on la note S. La ligne 2 peut donc s'écrire

$$x_i \leftarrow \frac{1}{A_{i,i}} (b_i - S).$$

Mais où calculer la valeur S? 4 choix possible : avant la ligne 1, entre les lignes 1 et 2, entre les lignes 2 et 3 ou après la ligne 3.
On ne peut pas calculer S après utilisation de sa valeur dans le calcul de x_i! ce qui élimine les 2 derniers choix. Ensuite, on ne peut sortir le calcul de S de la boucle puique la somme dépend de l'indice de boucle i : ce qui élimine le premier choix. On doit donc calculer S dans la boucle et avant le calcul de x_i.

Algorithme 2.15 $\mathcal{R}_1$

1: **Pour** $i \leftarrow 1$ **à** n **faire**
2: $\quad x_i \leftarrow \dfrac{1}{A_{i,i}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} A_{i,j}x_j\right)$
3: **Fin**

Algorithme 2.15 $\mathcal{R}_2$

1: **Pour** $i \leftarrow 1$ **à** n **faire**
2: $\quad S \leftarrow \sum_{j=1}^{i-1} A_{i,j}x_j$
3: $\quad x_i \leftarrow (b_i - S)/A_{i,i}$
4: **Fin**

Maintenant que l'on a isolé la *difficulté*, il reste à détailler le calcul de S. Celui-ci se fait **intégralement** en lieu et place de la ligne 2.

Algorithme 2.15 $\mathcal{R}_3$

1: **Pour** $i \leftarrow 1$ **à** n **faire**
2: $\quad S \leftarrow \sum_{j=1}^{i-1} A_{i,j}x_j$
3: $\quad x_i \leftarrow (b_i - S)/A_{i,i}$
4: **Fin**

Algorithme 2.15 $\mathcal{R}_4$

1: **Pour** $i \leftarrow 1$ **à** n **faire**
2: $\quad S \leftarrow 0$
3: $\quad$ **Pour** $j \leftarrow 1$ **à** $i-1$ **faire**
4: $\quad\quad S \leftarrow S + A(i,j) * x(j)$
5: $\quad$ **Fin**
6: $\quad x_i \leftarrow (b_i - S)/A_{i,i}$
7: **Fin**

Insister sur $S \leftarrow 0$ à l'intérieur de la boucle en i? (erreur trop courante des débutants)
On obtient alors l'algorithme final

Algorithme 2.15 Fonction RSLTriInf permettant de résoudre le système linéaire triangulaire inférieur inversible

$$\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}.$$

{algo:RSL:TriInf

Données : $\mathbb{A}$: matrice triangulaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inférieure inversible.
$\boldsymbol{b}$: vecteur de $\mathbb{K}^n$.
Résultat : $\boldsymbol{x}$: vecteur de $\mathbb{K}^n$.

1: **Fonction** $\boldsymbol{x} \leftarrow$ RSLTriInf ($\mathbb{A}, \boldsymbol{b}$)
2: $\quad$ **Pour** $i \leftarrow 1$ **à** n **faire**
3: $\quad\quad S \leftarrow 0$
4: $\quad\quad$ **Pour** $j \leftarrow 1$ **à** $i-1$ **faire**
5: $\quad\quad\quad S \leftarrow S + A(i,j) * x(j)$
6: $\quad\quad$ **Fin**
7: $\quad\quad x(i) \leftarrow (b(i) - S)/A(i,i)$
8: $\quad$ **Fin**
9: **Fin**

Matrices triangulaires supérieures

Soit $\mathbb{A}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure inversible et $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$. On veut résoudre le système linéaire

$$\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \iff \begin{pmatrix} A_{1,1} & \dots & \dots & A_{1,n} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & A_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

On remarque que l'on peut calculer successivement $x_n, x_{n-1}, \dots, x_1$, car il est possible de calculer x_i si on connait $x_{i+1}, \dots, x_n$: c'est la **méthode de remontée**. En effet, on a

$$(\mathbb{A}\boldsymbol{x})_i = b_i, \ \forall i \in [\![1, n]\!].$$

et donc, par définition d'un produit matrice-vecteur,

$$\sum_{j=1}^{n} A_{i,j}x_j = b_i, \ \forall i \in [\![1,n]\!].$$

Comme $\mathbb{A}$ est une matrice triangulaire supérieure, on a (voir Définition **??**) $A_{i,j} = 0$ si $j < i$. Ceci donne alors pour tout $i \in [\![1,n]\!]$

$$\begin{aligned} b_i &= \sum_{j=1}^{i-1} \underbrace{A_{i,j}}_{=0} x_j + A_{i,i}x_i + \sum_{j=i+1}^{n} A_{i,j}x_j \\ &= A_{i,i}x_i + \sum_{j=i+1}^{n} A_{i,j}x_j \end{aligned}$$

De plus la matrice $\mathbb{A}$ étant triangulaire inversible ses éléments diagonaux sont tous non nuls. On obtient donc x_i en fonction des $x_{i+1}, \dots, x_n$:

L:MDTMP:TS:eq03}

$$x_i = \frac{1}{A_{i,i}} \left(b_i - \sum_{j=i+1}^{n} A_{i,j}x_j \right), \ \forall i \in [\![1,n]\!]. \tag{2.43}$$

Algorithme 2.16 $\mathcal{R}_0$

1: Résoudre $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ en calculant successivement $x_n, \ x_{n-1}, \ \dots, x_1$.

Algorithme 2.16 $\mathcal{R}_1$

1: **Pour** $i \leftarrow n$ **à** 1 **faire**(**pas de** -1)
2: calculer x_i connaissant $x_{i+1}, \dots, x_n$ à l'aide de l'équation (**??**)
3: **Fin**

Algorithme 2.16 $\mathcal{R}_1$

1: **Pour** $i \leftarrow n$ **à** 1 **faire**(**pas de** -1)
2: Calculer x_i connaissant $x_{i+1}, \dots, x_n$ à l'aide de l'équation (**??**)
3: **Fin**

Algorithme 2.16 $\mathcal{R}_2$

1: **Pour** $i \leftarrow n$ **à** 1 **faire**(**pas de** -1)
2: $S \leftarrow \sum_{j=i+1}^{n} A_{i,j}x_j$
3: $x_i \leftarrow (b_i - S)/A_{i,i}$
4: **Fin**

Algorithme 2.16 $\mathcal{R}_3$

1: **Pour** $i \leftarrow n$ **à** 1 **faire**(**pas de** -1)
2: $S \leftarrow \sum_{j=i+1}^{n} A_{i,j}x_j$
3: $x_i \leftarrow (b_i - S)/A_{i,i}$
4: **Fin**

Algorithme 2.16 $\mathcal{R}_4$

1: **Pour** $i \leftarrow n$ **à** 1 **faire**(**pas de** -1)
2: $S \leftarrow 0$
3: **Pour** $j \leftarrow i+1$ **à** n **faire**
4: $S \leftarrow S + A(i,j) * x(j)$
5: **Fin**
6: $x_i \leftarrow (b_i - S)/A_{i,i}$
7: **Fin**

On obtient alors l'algorithme final

Algorithme 2.16 Fonction RSLTriSup permettant de résoudre le système linéaire triangulaire supérieur inversible

$$\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}.$$

SL:TriSup}

Données : $\mathbb{A}$: matrice triangulaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ supérieure inversible.
$\boldsymbol{b}$: vecteur de $\mathbb{R}^n$.
Résultat : $\boldsymbol{x}$: vecteur de $\mathbb{R}^n$.

```
1: Fonction x ← RSLTriSup ( A, b )
2:   Pour i ← n à 1 faire(pas de −1)
3:     S ← 0
4:     Pour j ← i + 1 à n faire
5:       S ← S + A(i, j) ∗ x(j)
6:     Fin
7:     x(i) ← (b(i) − S)/A(i, i)
8:   Fin
9: Fin
```

2.6.2 Méthode de Gauss-Jordan, écriture matricielle

Soient $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}()$ une matrice inversible et $\boldsymbol{b} \in \mathbb{K}^n$.
On va tout d'abord rappeller (très) brièvement l'**algorithme d'élimination** ou **algorithme de Gauss-Jordan** permettant de transformer le système linéaire $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ en un système linéaire équivalent dont la matrice est triangulaire supérieure. Ce dernier système se résoud par la méthode de remontée.
Ensuite, on va réécrire cet algorithme sous forme algébrique pour obtenir le théorème ...

Cette méthode doit son nom aux mathématiciens Carl Friedrich Gauss (1777-1855, mathématicien, astronome et physicien allemand) et Wilhelm Jordan (1842-1899, mathématicien et géodésien allemand) mais elle est connue des Chinois depuis au moins le Ier siècle de notre ère. Elle est référencée dans l'important livre chinois *Jiuzhang suanshu* ou *Les Neuf Chapitres sur l'art mathématique*, dont elle constitue le huitième chapitre, sous le titre « Fang cheng » (la disposition rectangulaire). La méthode est présentée au moyen de dix-huit exercices. Dans son commentaire daté de 263, Liu Hui en attribue la paternité à Chang Ts'ang, chancelier de l'empereur de Chine au IIe siècle avant notre ère.

Algorithme de Gauss-Jordan usuel

Pour la résolution du système linéaire $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ l'algorithme de Gauss-Jordan produit la forme échelonnée (réduite) d'une matrice à l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes du système. Trois types d'opérations élémentaires sont utilisées:

- Permutation de deux lignes ;
- Multiplication d'une ligne par un scalaire non nul ;
- Ajout du multiple d'une ligne à une autre ligne.

A l'aide de ces opérations élémentaires cet algorithme permet donc de transformer le système linéaire $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ en le système équivalent $\mathbb{U}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}$ où $\mathbb{U}$ est triangulaire supérieure. En fait, l'algorithme va transformer la matrice $\mathbb{A}$ et le second membre $\boldsymbol{b}$ pour aboutir à un système dont la matrice est triangulaire supérieure.

Algorithme 2.17 Algorithme de Gauss-Jordan formel pour la résolution de $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$

Pour $j \leftarrow 1$ **à** $n-1$ **faire**
  Rechercher l'indice k de la ligne du pivot (sur la colonne j, $k \in [\![j, n]\!]$)
  Permuter les lignes j ($\mathcal{L}_j$) et k ($\mathcal{L}_k$) du système si besoin.
  Pour $i \leftarrow j+1$ **à** n **faire**
    Eliminer en effectuant $\mathcal{L}_i \leftarrow \mathcal{L}_i - \frac{A_{i,j}}{A_{j,j}}\mathcal{L}_j$
  Fin
Fin
Résoudre le système triangulaire supérieur par la méthode de la remontée.

On va maintenant voir comment écrire cet algorithme de manière plus détaillée. Pour conserver sa lisibilité, on choisi pour chaque ligne un peu délicate de créer et d'utiliser une fonction dédiée à cette tâche.

{algo:RSL:GaussFormel}

Algorithme 2.18 Algorithme de Gauss-Jordan avec fonctions pour la résolution de $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$

Données : $\mathbb{A}$: matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible.
$\boldsymbol{b}$: vecteur de $\mathbb{K}^n$.
Résultat : $\boldsymbol{x}$: vecteur de $\mathbb{K}^n$.

Fonction $\boldsymbol{x} \leftarrow$ RSLGauss ($\mathbb{A}, \boldsymbol{b}$)
  Pour $j \leftarrow 1$ **à** $n-1$ **faire**
    $k \leftarrow$ CherchеIndPivot $(\mathbb{A}, j)$ ▷ CherchеIndPivot à écrire
    $[\mathbb{A}, \boldsymbol{b}] \leftarrow$ PermLignesSys $(\mathbb{A}, \boldsymbol{b}, j, k)$ ▷ PermLignesSys à écrire
    Pour $i \leftarrow j+1$ **à** n **faire**
      $[\mathbb{A}, \boldsymbol{b}] \leftarrow$ CombLignesSys $(\mathbb{A}, \boldsymbol{b}, j, i, -A(i,j)/A(j,j))$ ▷ CombLignesSys à écrire
    Fin
  Fin
  $\boldsymbol{x} \leftarrow$ RSLTriSup$(\mathbb{A}, \boldsymbol{b})$ ▷ RSLTriSup déjà écrite
Fin

Bien évidemment, il reste à décrire et écrire les différentes fonctions utilisées dans cette fonction :

Fonction $k \leftarrow$ **CherchеIndPivot**$(\mathbb{A}, j)$ **:** recherche $k \in [\![j, n]\!]$ tel que $\forall l \in [\![j, n]\!]$, $|A_{l,j}| \leqslant |A_{k,j}|$.

Fonction $[\mathbb{A}, \boldsymbol{b}] \leftarrow$ **PermLignesSys**$(\mathbb{A}, \boldsymbol{b}, i, k)$ **:** permute les lignes i et k de la matrice $\mathbb{A}$ ainsi que celles du vecteur $\boldsymbol{b}$.

Fonction $[\mathbb{A}, \boldsymbol{b}] \leftarrow$ **CombLignesSys**$(\mathbb{A}, \boldsymbol{b}, j, i, \alpha)$ **:** remplace la ligne i de la matrice A par la combinaison linéaire $\mathcal{L}_i \leftarrow \mathcal{L}_i + \alpha\mathcal{L}_j$. De même on remplace la ligne i de $\boldsymbol{b}$ par $b_i + \alpha b_j$.

Ces trois fonctions sont simples à écrire et sont données en Algorithmes 2.19, 2.20 et 2.21.

{algo:RSL:CherchеIndPivot}

Algorithme 2.19 Recherche d'un pivot pour l'algorithme de Gauss-Jordan. {algo:RSL:PermLignesSys}

Données : $\mathbb{A}$: matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
j : entier, $1 \leqslant j \leqslant n$.
Résultat : k : entier, indice ligne pivot

```
Fonction k ← CherchеIndPivot ( A, j )
  k ← j, pivot ← |A(j,j)|
  Pour i ← j+1 à n faire
    Si |A(i,j)| > pivot alors
      k ← i, pivot ← |A(i,j)|
    Fin
  Fin
Fin
```

{algo:RSL:CombLignesSys}

Algorithme 2.20 Permutte deux lignes d'une matrice et d'un vecteur.

Données : $\mathbb{A}$: matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
$\boldsymbol{b}$: vecteur de $\mathbb{K}^n$.
j, k : entiers, $1 \leqslant j, k \leqslant n$.
Résultat : $\mathbb{A}$ et $\boldsymbol{b}$ modifiés.

```
Fonction [A,b] ← PermLignesSys ( A,b,j,k )
  Pour l ← 1 à n faire
    t ← A(j,l), A(j,l) ← A(k,l), A(k,l) ← t
  Fin
  t ← b(j), b(j) ← b(k), b(k) ← t
Fin
```

Algorithme 2.21 Combinaison linéaire $\mathcal{L}_i \leftarrow \mathcal{L}_i + \alpha\mathcal{L}_j$ appliqué à une matrice et à un vecteur.

Données : $\mathbb{A}$: matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
$\boldsymbol{b}$: vecteur de $\mathbb{K}^n$.
j, i : entiers, $1 \leqslant j, i \leqslant n$.
alpha : scalaire de $\mathbb{K}$
Résultat : $\mathbb{A}$ et $\boldsymbol{b}$ modifiés.

```
Fonction [A,b] ← CombLignesSys ( A,b,j,i,α )
  Pour k ← 1 à n faire
    A(i,k) ← A(i,k) + α * A(j,k)
  Fin
  b(i) ← b(i) + αb(j)
Fin
```