Méthodes Numériques

Algorithmique numérique

François Cuvelier

Laboratoire d'Analyse Géométrie et Applications
Institut Galilée
Université Paris XIII.

20 mars 2016

Plan

Définition

♥ **Definition 1.1: Petit Robert 97**

Algorithmique : Enchaînement d'actions nécessaires à l'accomplissement d'une tâche.

Exemple 1 : permutation

Nous voulons permutter deux voitures sur un parking de trois places numérotées de 1 à 3 et ceci sans géner la circulation.
La première voiture, une Saxo, est sur l'emplacement 2, la seconde, une Clio, est sur l'emplacement 3.
Donner un algorithme permettant de résoudre cette tâche.

Exemple 2 : équation du premier degré

Donner un algorithme permettant de résoudre

$$ax = b$$

Caractéristiques d'un *bon* algorithme

- Il ne souffre d'aucune ambiguité $\Rightarrow$ très clair.
- Combinaison d'opérations (actions) élémentaires.
- Pour toutes les données d'entrée, l'algorithme doit fournir un résultat en un nombre fini d'opérations.

Première approche méthodologique

Etape 1 : Définir clairement le problème.

Première approche méthodologique

Etape 1 : Définir clairement le problème.

Etape 2 : Rechercher une méthode de résolution (formules, ...)

Première approche méthodologique

Etape 1 : Définir clairement le problème.

Etape 2 : Rechercher une méthode de résolution (formules, ...)

Etape 3 : Ecrire l'algorithme (par raffinement successif pour des algorithmes *compliqués*).

Plan

Vocabulaire de base

- constantes,variables,
- opérateurs (arithmétiques, relationnels, logiques),
- expressions,
- instructions (simples et composées),
- fonctions.

Données et constantes

- Donnée ⇒ introduite par l'utilisateur
- Constante ⇒ symbole, identificateur non modifiable

Variables

Definition 2.1

Une variable est un objet dont la valeur est modifiable, qui possède un nom et un type (entier, caractère, réel, complexe, tableau, matrice, vecteur...).

Opérateurs arithmétiques

Nom	Symbole	Exemple
addition	$+$	$a + b$
soustraction	$-$	$a - b$
opposé	$-$	$-a$
produit	$*$	$a * b$
division	$/$	a/b

Opérateurs relationnels

Nom	Symbole	Exemple
identique	$==$	$a == b$
différent	$\sim=$	$a \sim= b$
inférieur	$<$	$a < b$
supérieur	$>$	$a > b$
inférieur ou égal	$<=$	$a <= b$
supérieur ou égal	$>=$	$a >= b$

Opérateurs logiques

Nom	Symbole	Exemple
négation	$\sim$	$\sim a$
ou	$\vert$	$a \vert b$
et	$\&$	$a\&b$

Opérateur d'affectation

Nom	**Symbole**	**Exemple**
affectation	$\leftarrow$	$a \leftarrow b$

Expressions

Definition 2.2

Une expression est un groupe d'opérandes (i.e. nombres, constantes, variables, ...) liées par certains opérateurs pour former un terme algébrique qui représente une valeur (i.e. un élément de donnée simple)

Expressions

Definition 2.2

Une expression est un groupe d'opérandes (i.e. nombres, constantes, variables, ...) liées par certains opérateurs pour former un terme algébrique qui représente une valeur (i.e. un élément de donnée simple)

Exemple d'expression numérique

$$(b * b - 4 * a * c)/(2 * a)$$

Expressions

Definition 2.2

Une expression est un groupe d'opérandes (i.e. nombres, constantes, variables, ...) liées par certains opérateurs pour former un terme algébrique qui représente une valeur (i.e. un élément de donnée simple)

Exemple d'expression numérique

$$(b * b - 4 * a * c)/(2 * a)$$

Opérandes $\Rightarrow$ identifiants a, b, c,
constantes 4 et 2.

Expressions

Definition 2.2

Une expression est un groupe d'opérandes (i.e. nombres, constantes, variables, ...) liées par certains opérateurs pour former un terme algébrique qui représente une valeur (i.e. un élément de donnée simple)

Exemple d'expression numérique

$$(b * b - 4 * a * c)/(2 * a)$$

Opérandes $\Rightarrow$ identifiants a, b, c,
constantes 4 et 2.

Opérateurs $\Rightarrow$ symboles $*$, $-$ et $/$

Expressions

Definition 2.3

Une expression est un groupe d'opérandes (i.e. nombres, constantes, variables, ...) liées par certains opérateurs pour former un terme algébrique qui représente une valeur (i.e. un élément de donnée simple)

Exemple d'expression booléenne

$$(x < 3.14)$$

Expressions

Definition 2.3

Une expression est un groupe d'opérandes (i.e. nombres, constantes, variables, ...) liées par certains opérateurs pour former un terme algébrique qui représente une valeur (i.e. un élément de donnée simple)

Exemple d'expression booléenne

$$(x < 3.14)$$

Opérandes $\Rightarrow$ identifiants x et contantes 3.14

Expressions

Definition 2.3

Une expression est un groupe d'opérandes (i.e. nombres, constantes, variables, ...) liées par certains opérateurs pour former un terme algébrique qui représente une valeur (i.e. un élément de donnée simple)

Exemple d'expression booléenne

$$(x < 3.14)$$

Opérandes $\Rightarrow$ identifiants x et contantes 3.14
Opérateurs $\Rightarrow$ symboles $<$

Instructions

Definition 2.4

Une **instruction** est un ordre ou un groupe d'ordres qui déclenche l'exécution de certaines actions par l'ordinateur. Il y a deux types d'instructions : simple et structuré.

Instructions simples

- affectation d'une valeur a une variable.
- appel d'une fonction (procedure, subroutine, ... suivant les langages).

Instructions structurées

1. les instructions composées, groupe de pulsieurs instructions simples,
2. les instructions répétitives, permettant l'exécution répétée d'instructions simples, (i.e. boucles «pour», «tant que»)
3. les instructions conditionnelles, lesquels ne sont exécutées que si une certaine condition est respectée (i.e. «si»)

Exemple : boucle «pour»

Données : n

1: $S \leftarrow 0$
2: **Pour** $i \leftarrow 1$ **à** n (pas $+1$) **faire**
3: $\quad S \leftarrow S + \cos(i\hat{\ }2)$
4: **Fin Pour**

Mais que fait-il ?

Exemple : boucle «pour»

Données : n

$S \leftarrow 0$
Pour $i \leftarrow 1$ **à** n (pas $+1$) **faire**
    $S \leftarrow S + \cos(i\hat{\ }2)$
Fin Pour

Mais que fait-il ?

Calcul de $S = \sum_{i=1}^{n} \cos(i^2)$

Exemple : boucle «tant que»

$i \leftarrow 0, \;\; x \leftarrow 1$
Tantque $i < 1000$ **faire**
  $x \leftarrow x + i * i$
  $i \leftarrow i + 1$
Fin Tantque

Mais que fait-il ?

Exemple : boucle «tant que»

$i \leftarrow 0, \;\; x \leftarrow 1$
Tantque $i < 1000$ **faire**
    $x \leftarrow x + i * i$
    $i \leftarrow i + 1$
Fin Tantque

Mais que fait-il ?

Calcul de $x = 1 + \sum_{i=0}^{999} i\hat{}2$

Exemple : instructions conditionnelles «si»

Données :

note : un réel.

```
Si note > 12 alors
    affiche('gagne')
Sinon Si note ⩾ 8 alors
    affiche('oral')
Sinon
    affiche('perdu')
Fin Si
```

Plan

Description du problème

- Spécification d'un ensemble de données
  Origine : énoncé, hypothèses, sources externes, ...
- Spécification d'un ensemble de buts à atteindre
  Origine : résultats, opérations à effectuer, ...
- Spécification des contraintes

Recherche d'une méthode de résolution

- Clarifier l'énoncé.
- Simplifier le problème.
- Ne pas chercher à le traiter directement dans sa globalité.
- S'assurer que le problème est soluble (sinon problème d'indécidabilité !)
- Recherche d'une stratégie de construction de l'algorithme
- Décomposer le problème en sous problèmes partiels plus simples : raffinement.
- Effectuer des raffinements successifs.
- Le niveau de raffinement le plus élémentaire est celui des instructions.

Réalisation d'un algorithme

- Le type des données et des résultats doivent être précisés.
- L'algorithme doit fournir au moins un résultat.
- L'algorithme doit être exécuté en un nombre fini d'opérations.
- L'algorithme doit être spécifié clairement, sans la moindre ambiguïté.

Exercice 1

On cherche les solutions réelles de l'équation

$$ax^2 + bx + c = 0, \tag{1}$$

en supposant que $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$ sont donnés.
Ecrire un algorithme permettant de résoudre cette équation.

Exercice 2

Ecrire un algorithme permettant de calculer

$$S(x) = \sum_{k=1}^{n} k \sin(2 * k * x)$$

Exercice 3

Ecrire un algorithme permettant de calculer

$$P(z) = \prod_{n=1}^{k} sin(2 * k * z/n)^k$$

Exercice 4

Soit la série de Fourier

$$x(t) = \frac{4A}{\pi}\left\{\cos\omega t - \frac{1}{3}\cos 3\omega t + \frac{1}{5}\cos 5\omega t - \frac{1}{7}\cos 7\omega t + \cdots\right\}.$$

1. Ecrire un algorithme permettant de calculer $x(t)$ tronquée au trois premiers termes, avec $\omega = 2\pi$ et $A = 1$.
2. Même question avec une troncature au n-ième terme.

Exercice 5

Reprendre les quatre exercices précédants en utilisant les boucles «tant que».

Plan

Les fonctions

Les fonctions permettent

- d'automatiser certaines tâches répétitives au sein d'un même algorithme,
- d'ajouter à la clarté de la l'algorithme,
- l'utilisation de portion de code dans un autre algorithme,
- ...

Les fonctions prédéfinies

- les fonctions d'affichage et de lecture : **Affiche**, **Lit**

Les fonctions prédéfinies

- les fonctions d'affichage et de lecture : **Affiche**, **Lit**
- les fonctions mathématiques :

$$\sin,\ \cos,\ \exp,\ \cdots$$

Les fonctions prédéfinies

- les fonctions d'affichage et de lecture : **Affiche**, **Lit**
- les fonctions mathématiques :

$$\sin, \ \cos, \ \exp, \ \cdots$$

- les fonctions de gestion de fichiers
- **...**

Ecrire ses propres fonctions

1. Que doit-on calculer/réaliser précisement (but) ?
2. Quelles sont les données (avec leurs limitations) ?

Syntaxe

Fonction $[args_1, \ldots, args_n] \leftarrow$ NOMFONCTION($arge_1, \ldots, arge_m$)
instructions
Fin Fonction

Fonction $args \leftarrow$ NOMFONCTION($arge_1, \ldots, arge_m$)
instructions
Fin Fonction

équation du premier degré

Ecrire une fonction permettant de résoudre

$$ax + b = 0$$

- But :
- Données :
- Résultats :

équation du premier degré

Ecrire une fonction permettant de résoudre

$$ax + b = 0$$

- But :
  trouver $x \in \mathbb{R}$ solution de $ax + b = 0$.
- Données :
- Résultats :

équation du premier degré

Ecrire une fonction permettant de résoudre

$$ax + b = 0$$

- But :
  trouver $x \in \mathbb{R}$ solution de $ax + b = 0$.
- Données :
  $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$.
- Résultats :

équation du premier degré

Ecrire une fonction permettant de résoudre

$$ax + b = 0$$

- But :
  trouver $x \in \mathbb{R}$ solution de $ax + b = 0$.
- Données :
  $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$.
- Résultats :
  $x \in \mathbb{R}$.

équation du premier degré

Algorithme 1 Exemple de fonction : Résolution de l'équation du premier degré $ax + b = 0$.

Données : a : nombre réel différent de 0
b : nombre réel.

Résultat : x : un réel.

Fonction $x \leftarrow \text{REPD}(\ a, b\ )$
$\quad x \leftarrow -b/a$
Fin Fonction

équation du second degré

On cherche les solutions réelles de l'équation

$$ax^2 + bx + c = 0, \tag{2}$$

Pour celà, on pose $\Delta = b^2 - 4ac$

- si $\Delta < 0$ alors les deux solutions sont complexes,
- si $\Delta = 0$ alors la solution est $x = -\frac{b}{2a}$,
- si $\Delta > 0$ alors les deux solutions sont $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

Exercice

1. Ecrire la fonction `discriminant` permettant de calculer le discriminant de l'équation (2).
2. Ecrire la fonction `RESD` permettant de résoudre l'équation (2) en utilisant la fonction `discriminant`.
3. Ecrire un programme permettant de valider ces deux fonctions.