

TRAVAUX DIRIGÉS - 3

1 Intégration numérique¹

EXERCICE 1

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[a, b]$. Ecrire la fonction QUADPM permettant de calculer une approximation de l'intégrale de f sur $[a, b]$ par la méthode composite des points milieux.

EXERCICE 2

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[a, b]$. Ecrire la fonction QUADTRAPEZE permettant de calculer une approximation de l'intégrale de f sur $[a, b]$ par la méthode composite des trapèzes.

EXERCICE 3

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[a, b]$. Ecrire la fonction QUADSIMPSON permettant de calculer une approximation de l'intégrale de f sur $[a, b]$ par la méthode composite de Simpson.

EXERCICE 4

En utilisant les 3 fonctions précédentes, écrire un programme Matlab permettant d'obtenir la figure 1 sachant qu'ici $f(x) = \sin(x)$, $a = 0$ et $b = \pi$.

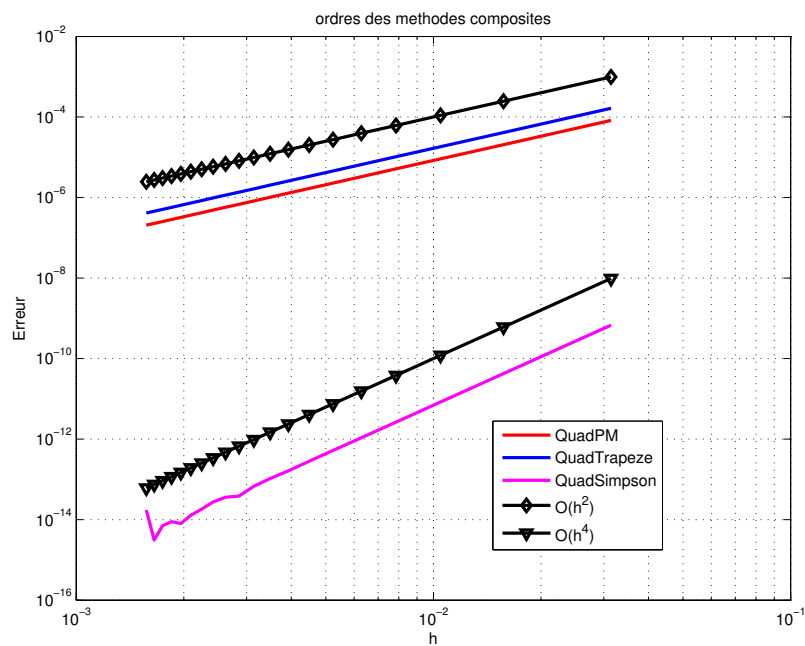


Figure 1: Ordre des méthodes composites

¹Exercices associés à la présentation sur les méthodes d'intégration numérique

2 Algèbre linéaire²

EXERCICE 5

Soient \mathbf{x} et \mathbf{y} deux vecteurs de \mathbb{R}^n et $\alpha \in \mathbb{R}$. Ecrire la fonction `VECAXPY` permettant de calculer $\mathbf{z} = \alpha\mathbf{x} + \mathbf{y}$.

EXERCICE 6

Soient \mathbf{x} et \mathbf{y} deux vecteurs de \mathbb{R}^n .

1. Ecrire la fonction `VECDOT` permettant de calculer le produit scalaire entre les vecteurs \mathbf{x} et \mathbf{y} .
2. Ecrire la fonction `VECNORM1` permettant de calculer

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n. \quad (6.1)$$

3. Ecrire la fonction `VECNORM2` permettant de calculer

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

EXERCICE 7

Soient \mathbb{X} et \mathbb{Y} deux matrices de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Ecrire la fonction `MATAXPY` permettant de retourner $\mathbb{Z} = \alpha\mathbb{X} + \mathbb{Y}$.

EXERCICE 8

Ecrire la fonction `MATTRANSPOSE` permettant de retourner la transposée d'une matrice.

EXERCICE 9

Ecrire la fonction `MATMULT` permettant de retourner le produit d'une matrice par un vecteur.

EXERCICE 10

Ecrire la fonction `MATMATMULT` permettant de retourner le produit de deux matrices.

EXERCICE 11

Ecrire la fonction `MATNORM1` permettant de retourner la norme d'une matrice $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$

$$\|\mathbb{A}\|_1 = \max_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket} \left(\sum_{i=1}^m |A_{i,j}| \right).$$

EXERCICE 12

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ (matrice réelle m lignes, n colonnes) et $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^p$. Le vecteur produit $\mathbf{v} = \mathbb{A}\mathbf{u}$ a pour composantes

$$v_i = \sum_{j=1}^n A_{i,j} u_j.$$

²Exercices associés à la présentation sur la résolution de systèmes linéaires

Q. 1 (mathématiques) 1. Quelle est la condition sur l'indice p pour que le vecteur produit \mathbf{v} soit bien défini?

2. Quelle est la dimension du vecteur produit \mathbf{v} ? ■

Q. 2 (algorithmique) Ecrire la fonction `MATMULT` permettant de retourner le produit d'une matrice par un vecteur. (Si vous n'avez pas su répondre à la question précédente prendre $m = p = n$ et $v \in \mathbb{R}^n$) ■

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$. La matrice produit $\mathbb{C} = \mathbb{A}\mathbb{B}$ a pour composantes

$$C_{i,j} = \sum_{k=1}^n A_{i,k} B_{k,j}.$$

Q. 3 (mathématiques) 1. Quelle est la condition sur les dimensions des matrices \mathbb{A} et \mathbb{B} pour que la matrice produit \mathbb{C} soit bien définie?

2. Quelles sont les dimensions de la matrice produit \mathbb{C} ? ■

Q. 4 (algorithmique) Ecrire la fonction `MATMATMULT` permettant de retourner le produit de deux matrices. (Si vous n'avez pas su répondre à la question précédente prendre $m = p = q = n$. Dans ce cas les trois matrices sont de dimension $n \times n$) ■

Soit $\mathbb{D} \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ une matrice diagonale ($D_{i,j} = 0$ si $j \neq i$) et $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. On souhaite résoudre le système linéaire $\mathbb{D}\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Q. 5 1. A quelles conditions sur les coefficients de la matrice, le système admet-il une unique solution?

2. Expliquer comment résoudre ce système linéaire en explicitant l'ensemble des formules nécessaires.

3. Ecrire la fonction `RSLDIAG` (algorithmique ou Matlab) permettant de résoudre le système linéaire $\mathbb{D}\mathbf{x} = \mathbf{b}$. ■

Soit $\mathbb{L} \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ une matrice triangulaire inférieure ($L_{i,j} = 0$ si $j > i$) et $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. On souhaite résoudre le système linéaire $\mathbb{L}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, c'est à dire trouver le vecteur $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\begin{pmatrix} L_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ L_{n,1} & \dots & \dots & L_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad (12.1)$$

Q. 6 1. A quelles conditions sur les coefficients de la matrice, le système (12.1) admet-il une unique solution?

2. Expliquer comment résoudre ce système linéaire en explicitant l'ensemble des formules nécessaires.

3. Ecrire la fonction `RSLINF` (algorithmique ou Matlab) permettant de résoudre le système linéaire $\mathbb{L}\mathbf{x} = \mathbf{b}$. ■