

# Méthodes Numériques I <sup>a</sup>

## Travaux Pratiques N° 2



## Polynômes d'interpolation de Lagrange

---

*a.* Version du 14 avril 2016

### Table des matières

<b>1</b>	<b>Rappels théoriques</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Première approche matlab</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>Vectorisation</b>	<b>2</b>
3.1	Un peu d'analyse numérique . . . . .	3
3.2	Algorithme optimisé . . . . .	3
<b>4</b>	<b>Points de Tchebycheff</b>	<b>4</b>
<b>5</b>	<b>Annexe</b>	<b>4</b>

## 1 Rappels théoriques

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $(x_i, y_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$  avec  $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$  et les  $x_i$  distincts deux à deux. Le **polynôme d'interpolation de Lagrange** associé aux  $n + 1$  points  $(x_i, y_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ , noté  $\mathcal{P}_n$ , est donné par

$$\mathcal{P}_n(t) = \sum_{i=0}^n y_i L_i(t), \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (1)$$

avec

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad L_i(t) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{t - x_j}{x_i - x_j}, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

**Théorème 1** *Le polynôme d'interpolation de Lagrange,  $\mathcal{P}_n$ , associé aux  $n + 1$  points  $(x_i, y_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ , est l'unique polynôme de degré au plus  $n$ , vérifiant*

$$\mathcal{P}_n(x_i) = y_i, \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket. \quad (3)$$

## 2 Première approche matlab

**Exercice 1 (Matlab)** *Ecrire la fonction LAGRANGE permettant de calculer  $\mathcal{P}_n$  (polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux  $n + 1$  points  $(x_i, y_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ ) au point  $t \in \mathbb{R}$  basée sur la formule (1).*

**Exercice 2 (Matlab)** *Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  avec  $a < b$ . On note  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_{n+1})$  la discrétisation régulière de l'intervalle  $[a, b]$  avec  $n+1$  points et  $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{n+1}$  tel que  $Y_i = f(X_i)$ ,  $\forall i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$ .*

1. *Ecrire le programme prog1 permettant de représenter graphiquement le polynôme d'interpolation de Lagrange associé à  $(X, Y)$  et la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[\alpha, \beta]$ .*
2. *Utiliser les jeux de données suivants pour reproduire les figures 1 et 2 données en annexe.*
  - (a)  $a = -1$ ,  $b = 1$ ,  $f : x \mapsto 1/(1 + 25x^2)$ ,  $\alpha = -1$ ,  $\beta = 1$  et faire varier  $n = 5, 11, \dots$
  - (b)  $a = 0$ ,  $b = \pi$ ,  $f : x \mapsto \cos(x)$ ,  $\alpha = -1$ ,  $\beta = 4$  et faire varier  $n = 5, 20, 28, \dots$

## 3 Vectorisation

**Exercice 3 (Algorithme)** *Soient  $\mathcal{P}_n$  le polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux  $n + 1$  points  $(x_i, y_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$  et  $\mathbf{t}$  un vecteur de  $\mathbb{R}^m$ .*

1. *Ecrire la fonction LAGRANGEVEC permettant de calculer le vecteur  $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^m$  tel que*

$$z_i = \mathcal{P}_n(t_i), \quad \forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket.$$

2. *Evaluer le coût arithmétique de la fonction LAGRANGEVEC en fonction de  $n$  et  $m$ .*

**Exercice 4 (Matlab)** *Transformer le programme prog1 de l'exercice 2 en un nouveau programme prog2 utilisant la fonction LAGRANGEVEC.*

### 3.1 Un peu d'analyse numérique

Dans cette partie, on va regarder la possibilité d'améliorer les performances, en terme de coût arithmétique, de la fonction `LAGRANGEVEC`.

**Exercice 5 (Analyse numérique (facultatif))** 1. Soit  $v$  le polynôme de degré  $n + 1$  défini par

$$v(t) = \prod_{i=0}^n (t - x_i)$$

Montrer que,

$$v'(x_i) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x_i - x_j), \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket. \quad (4)$$

2. Calculer  $L_i(t)$  en fonction de  $v(t)$  et  $v'(x_i)$ . En déduire que,  $\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ ,

$$\mathcal{P}_n(t) = v(t) \sum_{i=0}^n \frac{y_i}{(t - x_i)v'(x_i)}.$$

3. Démontrer que

$$\sum_{i=0}^n L_i(t) = 1, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

En déduire que,  $\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ ,

$$\mathcal{P}_n(t) = \frac{\sum_{i=0}^n \frac{y_i}{(t - x_i)v'(x_i)}}{\sum_{i=0}^n \frac{1}{(t - x_i)v'(x_i)}}. \quad (5)$$

### 3.2 Algorithme optimisé

**Exercice 6 (Algorithme)** Soit  $\mathbf{t}$  un vecteur de  $\mathbb{R}^m$ .

1. Ecrire la fonction `LAGRANGEVECOPT` permettant de calculer le vecteur  $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^m$  tel que

$$z_j = \mathcal{P}_n(t_j), \quad \forall j \in \llbracket 1, m \rrbracket$$

en utilisant au mieux<sup>1</sup> la formule (5).

2. Donner le coût arithmétique de la fonction `LAGRANGEVECOPT` en fonction de  $n$  et  $m$ .

**Exercice 7 (Matlab)** 1. Ecrire la fonction `LAGRANGEVECOPT` correspondant à l'exercice 6.

2. Ecrire un programme `prog3` similaire à `prog2` mais utilisant la fonction `LAGRANGEVECOPT`.

3. Comparer les programmes `prog2` et `prog3` avec  $m$  assez grand ( $m = 4000$  par exemple) en utilisant l'outil Matlab **Profiler**. (Quelques captures d'écran sont fournies en Annexe : figures 3 et 4)

1.  $v'(x_i)$  ne doit être calculé qu'une seule fois!

## 4 Points de Tchebycheff

Soient  $a$  et  $b$  deux réels,  $a < b$  et  $n \in \mathbb{N}$ . Les  $n + 1$  points de Tchebycheff de l'intervalle  $[a, b]$  sont donnés par

$$x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos\left(\frac{(2i+1)\pi}{2(n+1)}\right), \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket. \quad (6)$$

**Exercice 8 (Matlab)** 1. Ecrire la fonction `TCHEBYCHEFF` permettant de calculer les  $n + 1$  points de Tchebycheff de l'intervalle  $[a, b]$ .

2. Ecrire le programme `comparaison` permettant de comparer les polynômes de Lagrange avec points distribués uniformément et points de Tchebycheff. On peut prendre comme jeu de données  $a = -1$ ,  $b = 1$ ,  $f : x \mapsto 1/(1 + 25x^2)$ ,  $\alpha = -1$ ,  $\beta = 1$  et  $n = 11$ . Des exemples de figures sont donnés en Annexe (figures 5 et 6).

## 5 Annexe

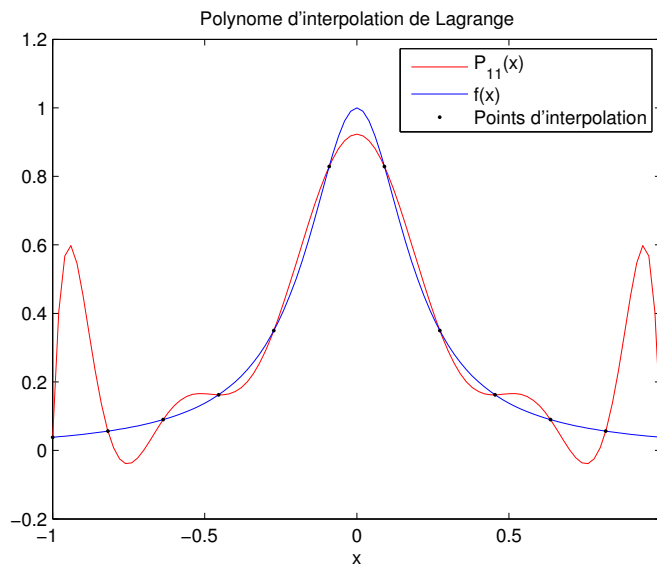


FIGURE 1: graphique obtenu à l'aide de `prog1` (exercice 2)

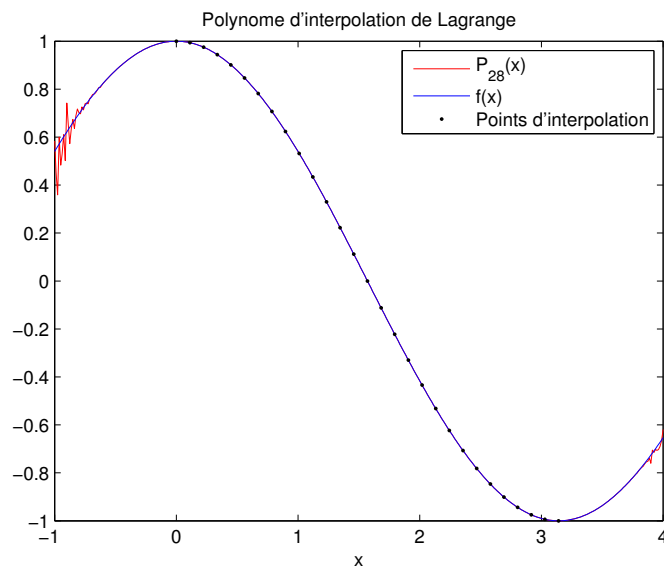
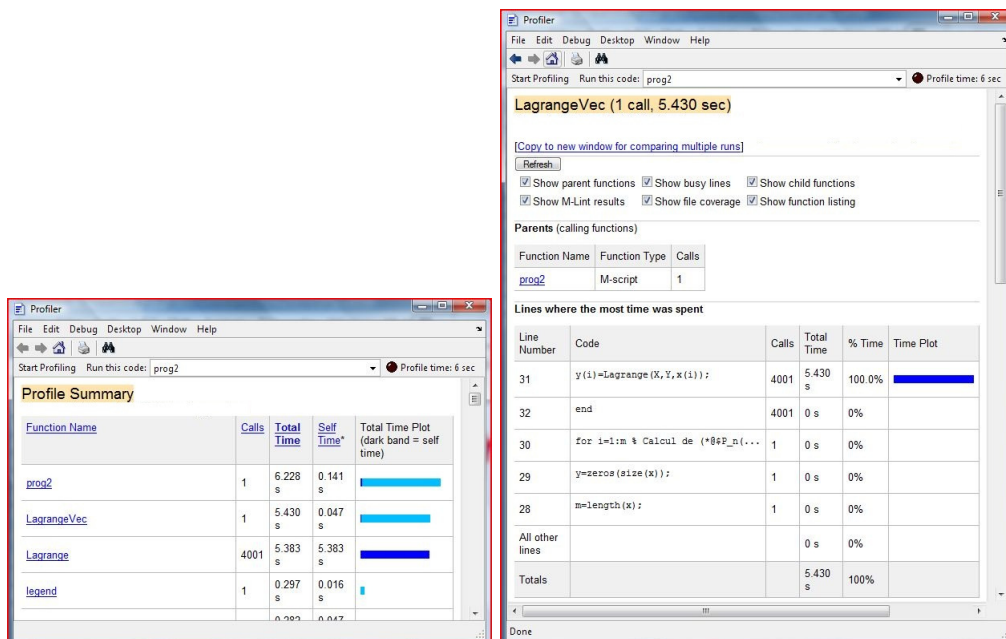


FIGURE 2: graphique obtenu à l'aide de prog1 (exercice 2)

FIGURE 3: Profiler avec prog2 (non optimisé),  $m = 4000$

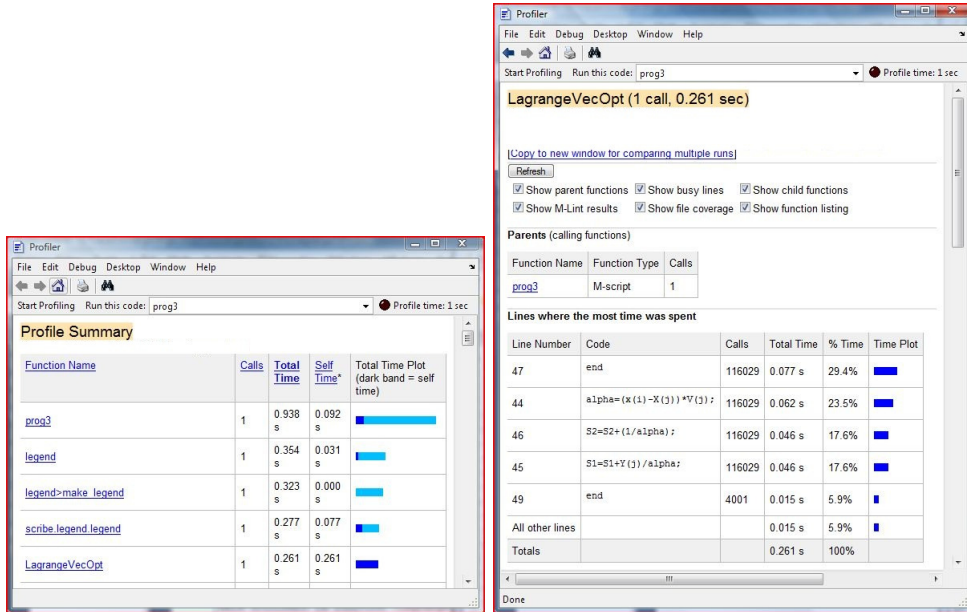


FIGURE 4: Profiler avec prog3 (optimisé),  $m = 4000$

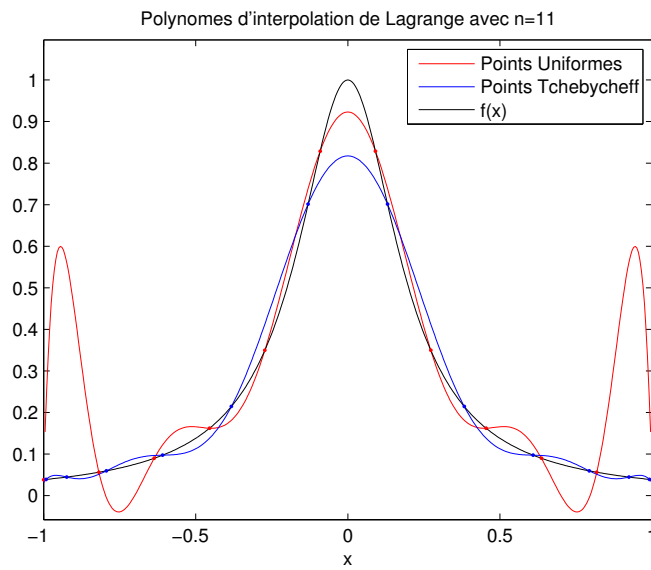
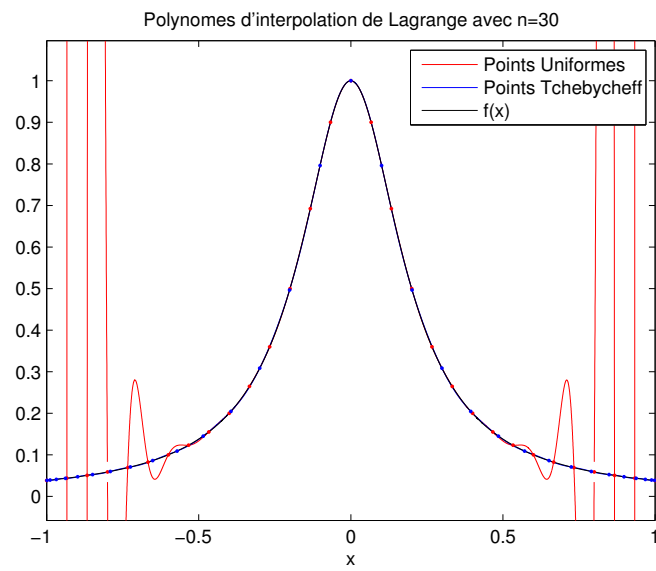


FIGURE 5: prog3 avec  $n = 11$

FIGURE 6: prog3 avec  $n = 30$