ENER1A **Méthodes Numériques I**
Sup'Galilée **Année 2015-2016**

Travaux pratiques - Contrôle du 23 mai 2015

Durée : 2h00

Remarques importantes

- Les trois parties sont indépendantes.
- Tous les codes demandés seront écrits dans le langage Matlab.
- Aucun document autorisé.
- Aucun échange de documents.
- Aucune communication entre étudiants.

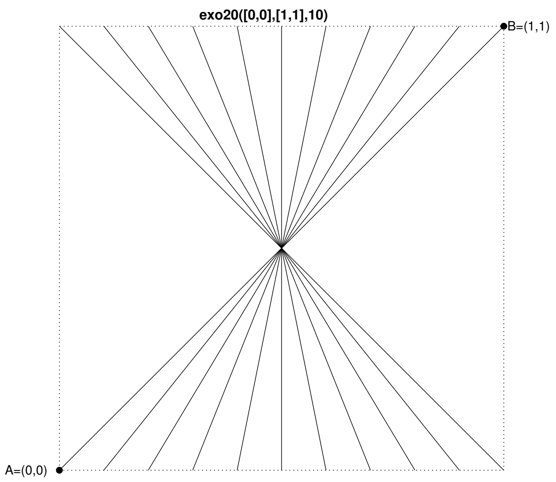
Exercice 1 : Graphisme (4 points)

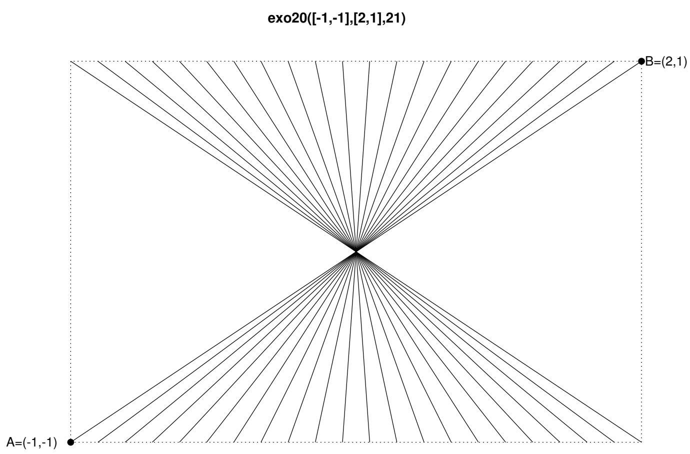
Q. 1 *Ecrire une fonction* `DisReg` *permettant de d'obtenir une discrétisation régulière de l'intervalle* $[a, b]$ *(*$a < b$*) en* $n + 1$ *points.* ∎

Soient $A = (x_A, y_A)$ et $B = (x_B, y_B)$ deux points du plan tels que $x_A < x_B$ et $y_A < y_B$. Ces deux points permettent de définir le rectangle de sommets A, (x_B, y_A), B et (x_A, y_B).

Q. 2 *Ecrire une fonction* `exo20` *de paramètres* A, B *et* n *permettant de*
- *représenter les bords du rectangle en pointillé,*
- *relier les points des bords inférieurs et supérieurs, dont les abscisses sont une discrétisation régulière en* $n + 1$ *points, et passant par le centre de symétrie du rectangle.*

Deux exemples d'utilisation de cette fonction sont donnés ci-dessous :





∎

Exercice 2 : Interpolation (8 points)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_i, y_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ avec $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$ et les x_i distincts deux à deux. Le **polynôme d'interpolation de Lagrange** associé aux $n + 1$ points $(x_i, y_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$, noté $\mathcal{P}_n$, est donné par

$$\mathcal{P}_n(t) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(t), \ \forall t \in \mathbb{R} \tag{2.1}$$

avec

$$\forall i \in [\![0, n]\!], \quad L_i(t) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{t - x_j}{x_i - x_j}, \ \forall t \in \mathbb{R}. \tag{2.2}$$

Théorème 1 *Le **polynôme d'interpolation de Lagrange**, $\mathcal{P}_n$, associé aux $n+1$ points $(x_i, y_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$, est l'unique polynôme de degré au plus n, vérifiant*

$$\mathcal{P}_n(x_i) = y_i, \ \forall i \in [\![0,n]\!]. \tag{2.3}$$

■

Q. 1 *Ecrire la **fonction** `Lagrange` permettant de calculer $\mathcal{P}_n$ (polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux $n+1$ points $(x_i, y_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$) au point $t \in \mathbb{R}$.* ■

Q. 2 *Soit $\boldsymbol{\alpha}$ un vecteur de $\mathbb{R}^m$. Ecrire la **fonction** `LagrangeVec` permettant de calculer le vecteur $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^m$ tel que*

$$\beta_i = \mathcal{P}_n(\alpha_i), \ \forall i \in [\![1,m]\!].$$

Les $n+1$ points de Tchebycheff de l'intervalle $[a,b]$ sont donnés par

$$x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\cos\left(\frac{(2i+1)\pi}{2(n+1)}\right), \ \forall i \in [\![0,n]\!]. \tag{2.4}$$

Q. 3 *Ecrire la fonction `Tchebycheff` permettant de calculer les $n+1$ points de Tchebycheff de l'intervalle $[a,b]$.* ■

Q. 4 *Soient $a=-1$, $b=1$, $f : t \mapsto 1/(1+25t^2)$, et $n=11$. On note $\boldsymbol{x} = (x_0, \ldots, x_n)$ les $n+1$ points de Tchebycheff de l'intervalle $[a,b]$ et $y_i = f(x_i)$, $\forall i \in [\![0,n]\!]$. Ecrire le **programme** `prog1` permettant de représenter graphiquement le polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux $n+1$ points $(x_i, y_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ et la fonction f sur l'intervalle $[-1.5, 1.5]$.* ■

EXERCICE 3 : Integration (8 points)

Soit f une fonction définie et suffisament régulière sur l'intervalle $[a,b]$. Les méthodes composites sont basées sur la relation de Chasles. On note $(x_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ une discrétisation régulière de l'intervalle $[a,b]$: $x_k = a + kH$ avec $H = (b-a)/n$. On a alors

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx. \tag{3.1}$$

Les formules de Newton-Cotes génériques sont données par

$$\int_\alpha^\beta f(t)dt \approx \sum_{i=0}^{m} \mu_i f(t_i).$$

Avec $t_i = \alpha + ih$, $\forall i \in [\![0,m]\!]$ et $h = (\beta-\alpha)/m$. En posant $\mu_i = hCw_i$, on a

m	C	w_0	w_1	w_2	w_3	w_4	nom	degré exactitude	ordre de l'erreur
1	1/2	1	1				trapèzes	1	2
2	1/3	1	4	1			Simpson	3	4
3	3/8	1	3	3	1		Simpson (3/8)	3	4
4	2/45	7	32	12	32	7	Villarceau	5	6

On choisi d'approcher chacune des intégrales de (3.1) par la formule de Simpson 3/8 ($m=3$).

Théorème 2 *Soit f une fonction définie et suffisament régulière sur l'intervalle $[a,b]$. La méthode **composite** de Simpson 3/8 a pour **degré d'exactitude** 3 : elle est exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à 3. L'erreur commise est en $\mathcal{O}(H^4)$: elle est donc d'ordre 4.* ■

Q. 1 *Ecrire la **fonction** `QuadCompNC` permettant de retourner l'approximation de $\int_a^b f(x)dx$ par la méthode **composite** utilisant la formule de Newton-Cotes avec $m=3$* ■

On va vérifier, pour l'approximation précédente, le degré d'exactitude. On rappelle par exemple que $\int_a^b x^n dx = \frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1}$.

Q. 2 *Ecrire un **programme** permettant de vérifier le degré d'exactitude.* ■

On va maintenant vérifier l'ordre de la méthode. On rappelle par exemple que $\int_a^b \cos(x)dx = \sin(b) - sin(a)$.

Q. 3 *Ecrire un **programme** permettant de vérifier graphiquement l'ordre de la méthode.* ■