

PARTIEL DU 25 JANVIER 2013
durée : 2h00.

Sans documents, sans calculatrice, sans portable, ...
Tous les calculs doivent être justifiés

EXERCICE 1

On note $x_i = a + ih$, $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, une discrétisation régulière de l'intervalle $[a, b]$. Soit une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ suffisamment régulière. On suppose que les y_i sont donnés par

$$y_i = f(x_i), \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket. \quad (1)$$

Q. 1 (algorithmique) *Ecrire la fonction DISREG permettant de retourner l'ensemble des $(x_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$.* ■

On rappelle le théorème suivant

Théorème 1 (Taylor-Lagrange) *On suppose que $f \in C^{n+1}$ sur I . Alors, pour tout $h \in \mathbb{R}$ tel que $\bar{x} + h$ appartienne à I , il existe $\theta_h \in]0, 1[$ tel que l'on ait*

$$f(\bar{x} + h) = \sum_{k=0}^n \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(\bar{x}) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\bar{x} + \theta_h h) \quad (2)$$

Q. 2 (mathématiques) 1. *En utilisant les formules de Taylor en x_{i+1} et x_{i-1} , montrer que, $\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$,*

$$f'(x_i) = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \quad (3)$$

2. *En utilisant les formules de Taylor en x_{i+1} et x_{i+2} , montrer que, $\forall i \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket$,*

$$f'(x_i) = \frac{-3y_i + 4y_{i+1} - y_{i+2}}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \quad (4)$$

3. *En utilisant les formules de Taylor en x_{i-1} et x_{i-2} , montrer que, $\forall i \in \llbracket 2, n \rrbracket$,*

$$f'(x_i) = \frac{3y_i - 4y_{i-1} + y_{i-2}}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \quad (5)$$

Q. 3 (algorithmique) *A partir des formules précédentes, écrire une fonction DERIVE2 permettant de calculer des approximations d'ordre 2 de $f'(x_i)$ pour $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$.* ■

EXERCICE 2

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_i, y_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ avec $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$ et les x_i distincts deux à deux. Le **polynôme d'interpolation de Lagrange** associé aux $n+1$ points $(x_i, y_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$, noté \mathcal{P}_n , est donné par

$$\mathcal{P}_n(t) = \sum_{i=0}^n y_i L_i(t), \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (1)$$

avec

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad L_i(t) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{t - x_j}{x_i - x_j}, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Théorème 2 Le *polynôme d'interpolation de Lagrange*, \mathcal{P}_n , associé aux $n + 1$ points $(x_i, y_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$, est l'unique polynôme de degré au plus n , vérifiant

$$\mathcal{P}_n(x_i) = y_i, \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket. \quad (3)$$

Q. 1 (algorithmique) Ecrire la fonction LAGRANGE permettant de calculer \mathcal{P}_n (polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux $n + 1$ points $(x_i, y_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$) au point $t \in \mathbb{R}$.

Q. 2 (algorithmique) Soit α un vecteur de \mathbb{R}^m . Ecrire la fonction LAGRANGEVEC permettant de calculer le vecteur $\beta \in \mathbb{R}^m$ tel que

$$\beta_i = \mathcal{P}_n(\alpha_i), \quad \forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket.$$

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_i, y_i, z_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ avec $(x_i, y_i, z_i) \in \mathbb{R}^3$ et les x_i distincts deux à deux. Le **polynôme d'interpolation d'Hermite** associé aux $n + 1$ points $(x_i, y_i, z_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$, noté \mathcal{H}_n , est donné par

$$\mathcal{H}_n(t) = \sum_{i=0}^n y_i A_i(t) + \sum_{i=0}^n z_i B_i(t), \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (4)$$

avec $\forall t \in \mathbb{R}, \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$,

$$A_i(t) = (1 - 2L'_i(x_i)(t - x_i)) L_i^2(t), \quad (5)$$

$$B_i(t) = (t - x_i) L_i^2(t). \quad (6)$$

$$(7)$$

On a alors

Théorème 3 Le *polynôme d'interpolation d'Hermite*, \mathcal{H}_n , associé aux $n + 1$ points $(x_i, y_i, z_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$, est l'unique polynôme de degré au plus $2n + 1$, vérifiant, $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$,

$$\mathcal{H}_n(x_i) = y_i, \quad (8)$$

$$\mathcal{H}'_n(x_i) = z_i. \quad (9)$$

De plus, on peut montrer que

$$L'_i(x_i) = \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{1}{x_i - x_j}. \quad (10)$$

Q. 3 (algorithmique) Ecrire la fonction HERMITE permettant de calculer \mathcal{H}_n (polynôme d'interpolation d'Hermite associé aux $n + 1$ points $(x_i, y_i, z_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$) au point $t \in \mathbb{R}$.

Q. 4 (algorithmique) Soit $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_m \end{pmatrix}$ un vecteur de \mathbb{R}^m . Ecrire la fonction HERMITEVEC permettant de

calculer le vecteur $\beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \dots \\ \beta_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$ tel que

$$\beta_i = \mathcal{H}_n(\alpha_i), \quad \forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket.$$

EXERCICE 3

Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ (matrice réelle m lignes, n colonnes) et $u \in \mathbb{R}^n$. Le vecteur produit $v = Au$ a pour composante

$$v_i = \sum_{j=1}^n A_{i,j} u_j.$$

Q. 1 (mathématiques) 1. Quelle est la condition sur l'indice p pour que le vecteur produit \mathbf{v} soit bien défini?

2. Quelle est la dimension du vecteur produit \mathbf{v} ? ■

Q. 2 (algorithmique) Ecrire la fonction `MATMULT` permettant de retourner le produit d'une matrice par un vecteur. ■

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$. La matrice produit $\mathbb{C} = \mathbb{A}\mathbb{B}$ a pour composante

$$C_{i,j} = \sum_{k=1}^n A_{i,k}B_{k,j}.$$

Q. 3 (mathématiques) 1. Quelle est la condition sur les dimensions des matrices \mathbb{A} et \mathbb{B} pour que la matrice produit \mathbb{C} soit bien définie?

2. Quelles sont les dimensions de la matrice produit \mathbb{C} ? ■

Q. 4 (algorithmique) Ecrire la fonction `MATMATMULT` permettant de retourner le produit de deux matrices. ■

Soit $\mathbb{L} \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ une matrice triangulaire inférieure ($L_{i,j} = 0$ si $j > i$) et $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. On souhaite résoudre le système $\mathbb{L}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, c'est à dire trouver le vecteur $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\begin{pmatrix} L_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ L_{n,1} & \dots & \dots & L_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad (1)$$

Q. 5 1. Expliquer comment résoudre ce problème.

2. Ecrire un algorithme de résolution. ■