

EXAMEN DU 20 MAI 2014
durée : 2h00.

Sans documents, sans calculatrice, sans portable, ...

EXERCICE 1 : 5 points

Soient x un réel, m, n, p, q des entiers strictement supérieurs à 1, $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_m)$ un vecteur de \mathbb{R}^m , $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_p)$ un vecteur de \mathbb{R}^p et $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_q)$ un vecteur de \mathbb{R}^q .

Le réel y est donné par

$$y = \prod_{i=1}^m \left((u_i + \cos(x)) \sum_{k=1}^n (k + (x - i)^2) \right)$$

- Q. 1**
1. Quelles sont les données nécessaires et suffisantes permettant de calculer y ? Préciser les types et les dimensions.
 2. Ecrire la fonction **PS** permettant de calculer y . Toutes les données seront passées en paramètre à la fonction.
 3. Donner un exemple d'utilisation de cette fonction. ■

Soit $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_m)$ le vecteur de \mathbb{R}^m défini par

$$z_i = \sum_{k=1}^p \left((u_i + \cos(kx)) \prod_{j=1}^p (v_k + (x - j)^2) \right), \quad \forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket.$$

- Q. 2**
1. Quelles sont les données nécessaires et suffisantes permettant de calculer \mathbf{z} ? Préciser les types et les dimensions.
 2. Ecrire la fonction **SP** permettant de calculer \mathbf{z} . Toutes les données seront passées en paramètre à la fonction.
 3. Donner un exemple d'utilisation de cette fonction. ■

EXERCICE 2 : 5 points

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_i, y_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ avec $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$ et les x_i distincts deux à deux. Le **polynôme d'interpolation de Lagrange** associé aux $n + 1$ points $(x_i, y_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$, noté \mathcal{P}_n , est donné par

$$\mathcal{P}_n(t) = \sum_{i=0}^n y_i L_i(t), \quad \forall t \in \mathbb{R} \tag{1}$$

avec

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad L_i(t) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{t - x_j}{x_i - x_j}, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Théorème 1 Le **polynôme d'interpolation de Lagrange**, \mathcal{P}_n , associé aux $n + 1$ points $(x_i, y_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$, est l'unique polynôme de degré au plus n , vérifiant

$$\mathcal{P}_n(x_i) = y_i, \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket. \tag{3}$$

- Q. 1 (algorithmique)** Ecrire la fonction **LAGRANGE** permettant de calculer \mathcal{P}_n (polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux $n + 1$ points $(x_i, y_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$) au point $t \in \mathbb{R}$. ■

Q. 2 (algorithmique) Soit α un vecteur de \mathbb{R}^m . Ecrire la fonction `LAGRANGEVEC` permettant de calculer le vecteur $\beta \in \mathbb{R}^m$ tel que

$$\beta_i = \mathcal{P}_n(\alpha_i), \quad \forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket.$$

EXERCICE 3 : 10 points

Soit u une fonction régulière de l'intervalle $[-1, 1]$. Les **formules de Gauss** permettent d'approcher l'intégrale de u sur $[-1, 1]$. Elles s'écrivent sous la forme générique

$$\int_{-1}^1 u(s) ds \approx \sum_{i=1}^n \omega_i u(s_i) \quad (1)$$

Voici le tableau permettant d'obtenir les trois premières formules :

Nombre de points, n	Poids (ω_i)	Points (s_i)
1	2	0
2	1, 1	$-\sqrt{1/3}, \sqrt{1/3}$
3	$5/9, 8/9, 5/9$	$-\sqrt{3/5}, 0, \sqrt{3/5}$

Q. 1 A partir du tableau précédent, écrire explicitement les formules de Gauss à 1, 2 et 3 points pour le calcul d'une approximation de $\int_{-1}^1 u(s) ds$. ■

Soit g une fonction régulière de l'intervalle $[\alpha, \beta]$. Par le changement de variable ramenant $[\alpha, \beta]$ en $[-1, 1]$, on obtient

$$\int_{\alpha}^{\beta} g(t) dt = \frac{\beta - \alpha}{2} \int_{-1}^1 g\left(\frac{\beta - \alpha}{2}s + \frac{\alpha + \beta}{2}\right) ds \quad (2)$$

On peut alors appliquer la formule de Gauss à n points sur $[-1, 1]$, pour obtenir

$$\int_{\alpha}^{\beta} g(t) dt \approx \mathcal{G}_n^{\alpha, \beta}(g) = \frac{\beta - \alpha}{2} \sum_{i=1}^n \omega_i g\left(\frac{\beta - \alpha}{2}s_i + \frac{\alpha + \beta}{2}\right). \quad (3)$$

Q. 2 En s'aidant de la question précédente, écrire les formules de Gauss à 1, 2 et 3 points pour le calcul d'une approximation de $\int_{\alpha}^{\beta} g(t) dt$. ■

Soit f une fonction régulière de l'intervalle $[a, b]$. On note $x_i, i \in \llbracket 0, N \rrbracket$, une discrétisation régulière de l'intervalle $[a, b]$ ($x_0 = a, x_N = b$, et $x_{j+1} - x_j$ constant.)

Q. 3 1. Donner la formule permettant de calculer l'ensemble des x_i .

2. Ecrire une fonction (algorithmique ou Matlab) `DISREG` permettant de retourner cette discrétisation. ■

Q. 4 1. Expliquer le principe de la méthode **composite** de Gauss à 2 points pour le calcul de $\int_a^b f(x) dx$. On rappelle que l'on utilisera pour cela la discrétisation précédente et la formule de Gauss à 2 points pour le calcul des approximations de $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx$.

2. Ecrire une fonction (algorithmique ou Matlab) `QUADGAUSS` permettant de retourner cette approximation. ■

L'erreur commise entre $\int_a^b f(x) dx$ et son approximation par la formule composite de Gauss à n points est donnée par Ch^{2n+2} où $h = \frac{b-a}{N}$ est le pas de la discrétisation et C une constante indépendante de h . L'ordre de l'erreur est la puissance de h : $2n + 2$.

Q. 5 1. Expliquez comment obtenir numériquement l'ordre de l'erreur de la méthode **composite** de Gauss à 2 points.

2. Ecrire un programme (algorithmique ou Matlab) permettant d'obtenir numériquement cet ordre. ■