ENER1A — **Méthodes Numériques I**
Sup'Galilée — **Année 2014-2015**

Examen du 27 mai 2015

durée : 1h30.

Sans documents, sans calculatrice, sans portable, ...

Exercice 1 : 7 points

Soient t, x deux réels, m, n, p, q des entiers strictement supérieurs à 1, $\boldsymbol{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{v} = (v_1, \ldots, v_p)$ un vecteur de $\mathbb{R}^p$ et $\boldsymbol{w} = (w_1, \ldots, w_q)$ un vecteur de $\mathbb{R}^q$.

Le réel y est donné par

$$y = \sum_{i=1}^{n} \left((u_i + t) \prod_{k=1}^{m} (i + \sin(x - kt)) \right)$$

Q. 1 1. *Quelles sont les données nécessaires et suffisantes permettant de calculer y? Préciser les types et les dimensions.*

2. *Ecrire la fonction **SP** permettant de calculer y. Toutes les données seront passées en arguments à la fonction.*

3. *Ecrire un programme (complet) utilisant cette fonction.* ▪

Soit $\boldsymbol{z} = (z_1, \ldots, z_n)$ le vecteur de $\mathbb{R}^n$ défini par

$$z_i = \prod_{k=1}^{p} \left((tu_i + kx) \sum_{j=1}^{p} (v_k + (x + j)) \right), \ \forall i \in [\![1, n]\!].$$

Q. 2 1. *Quelles sont les données nécessaires et suffisantes permettant de calculer $\boldsymbol{z}$? Préciser les types et les dimensions.*

2. *Ecrire la fonction **PS** permettant de calculer $\boldsymbol{z}$. Toutes les données seront passées en arguments à la fonction.*

3. *Ecrire un programme (complet) utilisant cette fonction.* ▪

Exercice 2 : 6 points

On note $x_i = a + ih$, $i \in [\![0, n]\!]$, une discrétisation régulière de l'intervalle $[a, b]$. Soit une fonction $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ suffisament régulière. On suppose que les y_i sont donnés par

$$y_i = f(x_i), \quad \forall i \in [\![0, n]\!]. \tag{1}$$

Q. 1 (algorithmique) *Ecrire une fonction* DisReg *permettant de retourner l'ensemble des $(x_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$.* ▪

On rappelle le théorème suivant

Théorème 1 (Taylor-Lagrange) *On suppose que $f \in \mathcal{C}^{n+1}$ sur I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $\bar{x} \in I$ et $h \in \mathbb{R}$ tel que $\bar{x} + h$ appartienne à I, on a*

$$f(\bar{x} + h) = f(\bar{x}) + \sum_{k=1}^{n} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(\bar{x}) + \mathcal{O}(h^{n+1}) \tag{2}$$

▪

Q. 2 (mathématiques) 1. *En utilisant* (1) *et les formules de Taylor en x_{i+1} et x_{i-1}, montrer que, $\forall i \in [\![1, n-1]\!]$,*

$$f'(x_i) = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \tag{3}$$

2. *En utilisant* (1) *et les formules de Taylor en* x_{i+1} *et* x_{i+2}*, montrer que,* $\forall i \in [\![0, n-2]\!]$,

$$f'(x_i) = \frac{-3y_i + 4y_{i+1} - y_{i+2}}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \tag{4}$$

3. *En utilisant* (1) *et les formules de Taylor en* x_{i-1} *et* x_{i-2}*, montrer que,* $\forall i \in [\![2, n]\!]$,

$$f'(x_i) = \frac{3y_i - 4y_{i-1} + y_{i-2}}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \tag{5}$$

■

Q. 3 (algorithmique) *A partir des formules précédentes, écrire une fonction* DERIVE2 *permettant de calculer des approximations d'ordre 2 de* $f'(x_i)$ *pour* $i \in [\![0, n]\!]$. ■

EXERCICE 3 : 7 points

Soit g une fonction régulière de l'intervalle $[\alpha, \beta]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Les **formules de Newton-Cotes** permettent d'approcher l'intégrale de g sur $[\alpha, \beta]$. Elles s'écrivent sous la forme générique

$$\int_\alpha^\beta g(t)dt \approx \sum_{i=0}^{n} \mu_i g(t_i) \tag{1}$$

où $(t_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ est une discrétisation régulière de l'intervalle $[\alpha, \beta]$ et l'on note h son pas de discrétisation. En posant $\mu_i = hCw_i$, on a le tableau suivant donnant les 3 premières formules

n	C	w_0	w_1	w_2	w_3	w_4	ordre
2	1/3	1	4	1			3
3	3/8	1	3	3	1		3
4	2/45	7	32	12	32	7	5

Q. 1 *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$*. Donner explicitement les formules permettant de calculer* h *et l'ensemble des* t_i. ■

Q. 2 *A partir du tableau précédent, écrire explicitement la formule de Newton-Cotes avec* $n = 3$ *permettant le calcul d'une approximation de* $\int_\alpha^\beta g(t)dt$. ■

Soit f une fonction régulière de l'intervalle $[a, b]$. On note x_k, $k \in [\![0, N]\!]$, une discrétisation régulière de l'intervalle $[a, b]$. D'après la relation de Chasles, on a

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^{N} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx. \tag{2}$$

Q. 3 1. *Expliquer le principe de la méthode* ***composite*** *utilisant la formule de Newton-Cotes avec* $n = 3$ *pour le calcul des différentes intégrales de* (2).

2. *Ecrire une fonction (algorithmique ou Matlab)* QUADCOMPNC *permettant de retourner cette approximation.* ■

Q. 4 *Ecrire un programme (script) permettant de calculer une approximation de* $\int_0^{\pi/4} \sin(3t\cos(t))dt$. ■