

EXAMEN DU 1 JUIN 2016  
durée : 2h.

**Sans documents et sans calculatrice**

Les paramètres d'entrées (données) et de sortie (résultats) de toutes les fonctions algorithmiques devront être décrits précisément.

**EXERCICE 1 : Dérivation (8 points)**

On note  $(x_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$  la discrétisation régulière de l'intervalle  $[a, b]$  en  $n + 1$  points. Soit une fonction  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  suffisamment régulière. On suppose les  $y_i$  donnés par

$$y_i = f(x_i), \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket. \quad (1.1)$$

**Q. 1 (algorithmique)** *Ecrire une fonction DISREG permettant de retourner l'ensemble des  $(x_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ .* ■

On rappelle le théorème suivant

**Théorème 1 (Taylor-Lagrange)** *On suppose que  $f \in \mathcal{C}^{n+1}$  sur  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ . Soit  $\bar{x} \in I$  et  $h \in \mathbb{R}$  tel que  $\bar{x} + h$  appartienne à  $I$ , on a*

$$f(\bar{x} + h) = f(\bar{x}) + \sum_{k=1}^n \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(\bar{x}) + \mathcal{O}(h^{n+1}) \quad (1.2)$$

**Q. 2 (mathématiques)** 1. *En utilisant (1.1) et les formules de Taylor en  $x_{i+1}$  et  $x_{i-1}$ , montrer que,  $\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ ,*

$$f'(x_i) = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \quad (1.3)$$

2. *En utilisant (1.1) et les formules de Taylor en  $x_{i+1}$  et  $x_{i+2}$ , montrer que,  $\forall i \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket$ ,*

$$f'(x_i) = \frac{-3y_i + 4y_{i+1} - y_{i+2}}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \quad (1.4)$$

3. *En utilisant (1.1) et les formules de Taylor en  $x_{i-1}$  et  $x_{i-2}$ , montrer que,  $\forall i \in \llbracket 2, n \rrbracket$ ,*

$$f'(x_i) = \frac{3y_i - 4y_{i-1} + y_{i-2}}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \quad (1.5)$$

**Q. 3 (algorithmique)** *A partir des formules précédentes, écrire une fonction DERIVE2 permettant de retourner des approximations d'ordre 2 de  $f'(x_i)$  pour  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ .* ■

**Q. 4 (algorithmique)** *Soit  $f(x) = \cos(3 \sin(3x^4 + 1))$ . En utilisant au mieux les fonctions déjà écrites, écrire un algorithme complet permettant de calculer des approximations d'ordre 2 de la dérivée de  $f$  aux 101 points de la discrétisation régulière de  $[0, \pi]$ .* ■

**EXERCICE 2 : Interpolation (8 points)**

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $(x_i, y_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$  avec  $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$  et les  $x_i$  distincts deux à deux. Le **polynôme d'interpolation de Lagrange** associé aux  $n + 1$  points  $(x_i, y_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ , noté  $\mathcal{P}_n$ , est donné par

$$\mathcal{P}_n(t) = \sum_{i=0}^n y_i L_i(t), \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (2.1)$$

avec

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad L_i(t) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{t - x_j}{x_i - x_j}, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (2.2)$$

**Théorème 2** Le *polynôme d'interpolation de Lagrange*,  $\mathcal{P}_n$ , associé aux  $n + 1$  points  $(x_i, y_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ , est l'unique polynôme de degré au plus  $n$ , vérifiant

$$\mathcal{P}_n(x_i) = y_i, \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket. \quad (2.3)$$

**Q. 1** Ecrire la *fonction Lagrange* permettant de calculer  $\mathcal{P}_n$  (polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux  $n + 1$  points  $(x_i, y_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ ) au point  $t \in \mathbb{R}$ .

**Q. 2** Soit  $\alpha$  un vecteur de  $\mathbb{R}^m$ . Ecrire la *fonction LagrangeVec* permettant de calculer le vecteur  $\beta \in \mathbb{R}^m$  tel que

$$\beta_i = \mathcal{P}_n(\alpha_i), \quad \forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket.$$

**Q. 3** Les  $n + 1$  points de Tchebycheff de l'intervalle  $[a, b]$  sont donnés par

$$z_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos\left(\frac{(2i+1)\pi}{2(n+1)}\right), \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket. \quad (2.4)$$

Ecrire la *fonction Tchebycheff* permettant de calculer ces  $n + 1$  points.

**Q. 4** Soient  $a = -1$ ,  $b = 1$ ,  $f : t \mapsto \cos(1 + 25t^2)$ , et  $n = 11$ . On note  $\mathbf{x} = (x_0, \dots, x_n)$  et  $\mathbf{z} = (z_0, \dots, z_n)$  respectivement les  $n + 1$  points de la discrétisation régulière de l'intervalle  $[a, b]$  et les  $n + 1$  points de Tchebycheff de l'intervalle  $[a, b]$ . On note  $y_i = f(x_i)$ ,  $w_i = f(z_i) \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . Ecrire un algorithme complet permettant de calculer au point  $t = \pi/3$

- le polynôme d'interpolation de Lagrange passant par les  $n + 1$  points  $(x_i, y_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$
- le polynôme d'interpolation de Lagrange passant par les  $n + 1$  points  $(z_i, w_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$

### EXERCICE 3 : Produits et sommes (4 points)

Soient  $t, x$  deux réels,  $m, n, p, q$  des entiers strictement supérieurs à 1,  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$  un vecteur de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_p)$  un vecteur de  $\mathbb{R}^p$  et  $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_q)$  un vecteur de  $\mathbb{R}^q$ .

Soit  $y$  le réel défini par

$$y = \sum_{k=1}^n \left( (tu_k + x) \prod_{j=1}^p (v_j + k) \right).$$

**Q. 1** 1. Quelles sont les données nécessaires et suffisantes permettant de calculer  $y$ ? Préciser les types et les dimensions.

2. Ecrire la fonction **SP** permettant de calculer  $y$ . Toutes les données seront passées en paramètre à la fonction.

3. Ecrire un algorithme (complet) utilisant cette fonction.

Soit  $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n)$  le vecteur de  $\mathbb{R}^n$  défini par

$$z_i = \prod_{j=1}^n \left( (u_j + i\pi) \sum_{k=1}^m (j\pi + \sin(x - kt)) \right), \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket.$$

**Q. 2** 1. Quelles sont les données nécessaires et suffisantes permettant de calculer  $\mathbf{z}$ ? Préciser les types et les dimensions.

2. Ecrire la fonction **PS** permettant de calculer  $\mathbf{z}$ . Toutes les données seront passées en paramètre à la fonction.

3. Ecrire un algorithme (complet) utilisant cette fonction.