Montrer que $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ (1)

rappel [ On a égalité entre deux ensembles $A$ et $B$, si on a la double inclusion $A \subset B$ et $B \subset A$ (voir définition 1.5)

Démontrer l'égalité (1) revient, par définition, à démontrer la double inclusion

$$((A \setminus B) \cup (B \setminus A)) \subset ((A \cup B) \setminus A \cap B) \quad (2)$$

et $$((A \cup B) \setminus (A \cap B)) \subset ((A \setminus B) \cup (B \setminus A)) \quad (3)$$

- Montrons que l'inclusion (2) est vraie

rappel [ Démontrer l'inclusion $A \subset B$ est équivalent à démontrer que $\forall x \in E$; si $x \in A$ alors $x \in B$.

Il faut donc démontrer que

$\forall x \in E$, si $x \in (A \setminus B)$ ou $(B \setminus A)$ alors $x \in (A \cup B) \setminus A \cap B)$

Soit $x \in E$. Supposons $x \in (A \setminus B)$ ou $x \in B \setminus A$ montrons qu'alors $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

* si $x \in A \setminus B$ alors $x \in A$ et $x \notin B$. Comme $A \subset A \cup B$, on en déduit $x \in A \cup B$. De plus $A \cap B \subset B$, on a donc $x \notin A \cap B$. Ceci nous donne $x \in A \cup B$ et $x \notin A \cap B$, c'est à dire $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
* si $x \in B \setminus A$ alors $x \in B$ et $x \notin A$. Comme précédement, on en déduit que $x \in A \cup B$ et $x \notin A \cap B \subset A$, c'est à dire $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

L'inclusion (2) est donc vraie

- Montrons que l'inclusion (3) est vraie, c'est à dire

$\forall x \in E$, si $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ alors $x \in (A \setminus B)$ ou $(B \setminus A)$

Soit $x \in E$. Supposons $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$, alors $x \in A \cup B$ et $x \notin A \cap B$. Comme $x \in A \cup B$, on a deux cas $x \in A$ ou $x \in B$.

* si $x \in A$, comme $x \notin A \cap B$ on a $x \notin B$ (sinon $x \in A \cap B$). On a alors $x \in A \setminus B$, et comme $A \setminus B \subset ((A \setminus B) \cup (B \setminus A))$ on obtient $x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$
* si $x \in B$, comme $x \notin A \cap B$ on a $x \notin A$. On a alors $x \in B \setminus A$ et on en déduit $x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

L'inclusion (3) est donc vraie.

La double inclusion (2), (3) est vraie donc l'égalité (1) est vraie ■

Autre démonstration

$$(A\cup B)\setminus(A\cap B)=\{x\in E\,;\ x\in A\cup B \text{ et } x\notin A\cap B\}$$

remarque

⚠ $\boxed{x\notin A\cap B \Leftrightarrow x\notin A \text{ ou } x\notin B}$

En effet
$$\begin{aligned} x\notin A\cap B &\Leftrightarrow \text{non}\,(x\in A\cap B)\\ &\Leftrightarrow \text{non}\,(x\in A \text{ et } x\in B)\\ &\Leftrightarrow \text{non}(x\in A) \text{ ou } \text{non}(x\in B)\\ &\Leftrightarrow x\notin A \text{ ou } x\notin B \end{aligned}$$

ou encore
$$\begin{aligned} x\notin A\cap B &\Leftrightarrow x\in E\setminus(A\cap B)\\ &\Leftrightarrow x\in (E\setminus A)\cup(E\setminus B) \quad \text{(voir Proposition 1.28)}\\ &\Leftrightarrow x\in A\setminus B \text{ ou } x\in E\setminus B\\ &\Leftrightarrow x\notin A \text{ ou } x\notin B \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(A\cup B)\setminus(A\cap B)&=\{x\in E\,;\ (x\in A \underline{\text{ ou }} x\in B) \underline{\text{ et }} (x\notin A \text{ ou } x\notin B)\}\\ &\qquad\qquad \text{on distribue}\\ &=\{x\in E\,;\ (x\in A \underline{\text{ et }}(x\notin A \text{ ou } x\notin B)) \underline{\text{ ou }} (x\in B \underline{\text{ et }}(x\notin A \text{ ou } x\notin B))\}\\ &=\{x\in E\,;\ x\in A \text{ et } (x\notin A \text{ ou } x\notin B)\} \underline{\cup} \{x\in E\,;\ x\in B \text{ et } (x\notin A \text{ ou } x\notin B)\} \quad (4)\end{aligned}$$

On a en distribuant

$$\begin{aligned}&\{x\in E\,;\ x\in A \text{ et } (x\notin A \text{ ou } x\notin B)\}\\ &=\{x\in E\,;\ \underbrace{(x\in A \text{ et } x\notin A)}_{\text{toujours faux}} \text{ ou } (x\in A \text{ et } x\notin B)\}\\ &=\{x\in E\,;\ x\in A \text{ et } x\notin B\}=A\setminus B \qquad (5)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}&\{x\in E\,;\ x\in B \text{ et } (x\notin A \text{ ou } x\notin B)\} \quad \text{en distribuant}\\ &=\{x\in E\,;\ (x\in B \text{ et } x\notin A) \text{ ou } \underbrace{(x\in B \text{ et } x\notin B)}_{\text{toujours faux}}\}\\ &=\{x\in E\,;\ x\in B \text{ et } x\notin A\}=B\setminus A \qquad (6)\end{aligned}$$

En utilisant (5) et (6) dans (4) on obtient

$$(A\cup B)\setminus(A\cap B)=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$$