Exo 1.12 A, B, C 3 sous-ensembles de l'ensemble E

(a) Ecrire 4 inclusions satisfaites par $B \cap C$

$B \cap C \subset B$, $B \cap C \subset C$, $B \cap C \subset E$, $B \cap C \subset B \cup C$

$B \cap C \subset A \cup B$, $B \cap C \subset A \cup C$, ...

(b) $B \cap C \subset A \cup B$

dem 1: On a $B \cap C \subset B$ et $B \subset A \cup B$

donc $B \cap C \subset A \cup B$ ■

dem 2:

rappels

$B \cap C \underset{def}{=} \{x \in E \,;\, \mathcal{P}(x)\}$ avec $\mathcal{P}(x)$: $x \in B$ et $x \in C$ (i.e. $x \in B \cap C$)

$A \cup B \underset{def}{=} \{x \in E \,;\, Q(x)\}$ avec $Q(x)$: $x \in A$ ou $x \in B$ (i.e. $x \in A \cup B$)

Proposition 1.20 $\| (\mathcal{P} \Rightarrow Q)$

$\| \Leftrightarrow \{x \in E \,;\, \mathcal{P}(x)\} \subset \{x \in E \,;\, Q(x)\}$

Démontrer $B \cap C \subset A \cup B$ est équivalent à démontrer $\mathcal{P} \Rightarrow Q$

c'est à dire $\forall x \in E$ si $\mathcal{P}(x)$ est vraie alors $Q(x)$ est vraie

Démontrer $B \cap C \subset A \cup B$ est equivalent à démontrer que

$\forall x \in E$, si $x \in B \cap C$ alors $x \in A \cup B$.

$\forall x \in E$, si $x \in B \cap C$ alors $x \in B$.

Or on a, $B \subset A \cup B \Rightarrow$ si $x \in B$ alors $x \in A \cup B$.

(c) $A \subset B$ et $B \subset C$

$A \cup B \subset B$ (car $A \subset B$

$A \cup B \subset C$ (car $B \subset C$ et en utilisant $A \cup B \subset B$)

(d) $(A \cup B \subset B \cap C) \Leftrightarrow (A \subset B$ et $B \subset C)$

On va démontrer la double implication. (voir definition 1.18)

($\Leftarrow$) • Montrons que ($A \subset B$ et $B \subset C$) $\Rightarrow$ ($A \cup B \subset B \cap C$)

rappels

Ceci revient à démontrer que sous l'hypothèse ($A \subset B$ et $B \subset C$)

(i.e la proposition ($A \subset B$ et $B \subset C$) est vraie) alors

$A \cup B \subset B \cap C$

ou autrement dit

si ($A \subset B$ et $B \subset C$) alors ($A \cup B \subset B \cap C$)

Supposons ($A \subset B$ et $B \subset C$). On a $A \cup B \subset B$ car $A \subset B$

et $B \cap C = B$ car $B \subset C$. Donc $A \cup B \subset B = B \cap C$.

$\Rightarrow$ • Montrons que $(A \cup B \subset B \cap C) \Rightarrow (A \subset B$ et $B \subset C)$.

Supposons que $A \cup B \subset B \cap C$, on doit alors montrer que $A \subset B$ <u>et</u> $B \subset C$.

* Montrons tout d'abord que $A \subset B$ (ie $\forall x \in E$; si $x \in A$ alors $x \in B$)

Soit $x \in A$, comme $A \subset A \cup B$ on a $x \in A \cup B$. Or, par hypothèse, $A \cup B \subset B \cap C$ donc $x \in B \cap C$ d'où $x \in B$

* Montrons ensuite que $B \subset C$.

Soit $x \in B$, comme $B \subset A \cup B$ on a $x \in A \cup B$. Or, par hypothèse, $A \cup B \subset B \cap C$ donc $x \in B \cap C$ d'où $x \in C$.

On a donc démontré que si $(A \cup B \subset B \cap C)$ alors

$$(A \subset B \text{ et } B \subset C).$$

Conclusion : On vient de démontrer la double implication

$$(A \cup B \subset B \cap C) \Rightarrow (A \subset B \text{ et } B \subset C)$$

et

$$(A \subset B \text{ et } B \subset C) \Rightarrow (A \cup B \subset B \cap C).$$

On a donc équivalence entre les deux propriétés :

$$(A \cup B \subset B \cap C) \Leftrightarrow (A \subset B \text{ et } B \subset C)$$