

Exercice 3.7. Le quantificateur $\exists!$ s'utilise pour exprimer l'*existence* d'un *unique* élément. Si E est un ensemble et \mathcal{P} une propriété portant sur les éléments de E , la proposition $(\exists!x \in E, \mathcal{P}(x))$ signifie

Il existe un et un seul x dans E pour lequel $\mathcal{P}(x)$ est vraie.

(a) Exprimer la proposition $\mathcal{Q} : (\exists!x \in E, \mathcal{P}(x))$ en terme de propriété de l'ensemble $\{x \in E; \mathcal{P}(x)\}$.

L'ensemble $\{x \in E; \mathcal{P}(x)\}$ est réduit à un singleton, c'est à dire qu'il contient un et un seul élément.

□

(b) Notons $\mathcal{R}_1 : (\exists x \in E, \mathcal{P}(x))$. Formulez une proposition \mathcal{R}_2 telle que l'on ait l'équivalence suivante :

$$\mathcal{Q} \Leftrightarrow (\mathcal{R}_1 \text{ et } \mathcal{R}_2),$$

où \mathcal{R}_1 exprime l'existence, et \mathcal{R}_2 l'unicité.

L'unicité exprime le fait que si deux éléments de E vérifient une même propriété alors ces deux éléments sont égaux :

$$\mathcal{R}_2 : \left(\forall x \in E, \forall y \in E, \left((\mathcal{P}(x) \text{ et } \mathcal{P}(y)) \Rightarrow (x = y) \right) \right).$$

□

(c) Utilisez la formule $\mathcal{Q} \Leftrightarrow (\mathcal{R}_1 \text{ et } \mathcal{R}_2)$ pour exprimer $(\text{non } \mathcal{Q})$.

Tout d'abord on rappelle (voir remarque 1.39) que si \mathcal{A} et \mathcal{B} sont des propositions mathématiques alors

$$(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \Leftrightarrow (\text{non } \mathcal{A}) \text{ ou } \mathcal{B}.$$

On a alors

$$\left((\mathcal{P}(x) \text{ et } \mathcal{P}(y)) \Rightarrow (x = y) \right) \Leftrightarrow \left(\left(\text{non } (\mathcal{P}(x) \text{ et } \mathcal{P}(y)) \right) \text{ ou } (x = y) \right).$$

La proposition \mathcal{R}_2 peut s'exprimer de manière équivalente sous la forme :

$$\mathcal{R}_2 : \left(\forall x \in E, \forall y \in E, \left(\left(\text{non } (\mathcal{P}(x) \text{ et } \mathcal{P}(y)) \right) \text{ ou } (x = y) \right) \right).$$

De plus on a,

$$\begin{aligned} \text{non} \left(\left(\text{non } (\mathcal{P}(x) \text{ et } \mathcal{P}(y)) \right) \text{ ou } (x = y) \right) &\Leftrightarrow \left(\text{non} (\text{non } (\mathcal{P}(x) \text{ et } \mathcal{P}(y))) \text{ et } \text{non} (x = y) \right) \\ &\Leftrightarrow \left((\mathcal{P}(x) \text{ et } \mathcal{P}(y)) \text{ et } (x \neq y) \right) \\ &\Leftrightarrow \left((\mathcal{P}(x) \text{ et } \mathcal{P}(y) \text{ et } (x \neq y)) \right) \end{aligned}$$

On obtient alors

$$\text{non } \mathcal{R}_2 : \left(\exists x \in E, \exists y \in E, (\mathcal{P}(x) \text{ et } \mathcal{P}(y) \text{ et } (x \neq y)) \right).$$

Enfin, la négation de la proposition \mathcal{Q} est

$$\begin{aligned} (\text{non } \mathcal{Q}) &\Leftrightarrow (\text{non } (\mathcal{R}_1 \text{ et } \mathcal{R}_2)) \\ &\Leftrightarrow ((\text{non } \mathcal{R}_1) \text{ ou } (\text{non } \mathcal{R}_2)) \\ &\Leftrightarrow \left(\left(\forall x \in E, (\text{non } \mathcal{P}(x)) \right) \text{ ou } \left(\exists x \in E, \exists y \in E, (\mathcal{P}(x) \text{ et } \mathcal{P}(y) \text{ et } (x \neq y)) \right) \right) \end{aligned}$$

□