**Exercice 4.4.** Ecrivez les propositions suivantes sous forme d'implication, en formule. Puis énoncez la contraposée et démontrez-la.

(1) Si $n \in \mathbb{N}$ et $n^2$ est imapir, alors $n$ est impair.

$\square$

(2) Aucun nombre impair n'est la somme de deux nombres impairs.

$\square$

(3) Soient $m \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$ deux entiers impairs tel que $m$ divise $2n$, alors $m$ divise $n$.

*On a sous forme d'implication, en formule :*

$$\Big(\forall m \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}, \Big(\big(\operatorname{non}(2|m) \text{ et } \operatorname{non}(2|m) \text{ et } (m|2n)\big) \Rightarrow (m|n)\Big)\Big).$$

*La contraposée est :*

$$\Big(\forall m \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}, \Big(\operatorname{non}(m|n) \Rightarrow \big((2|m) \text{ ou } (2|m) \text{ ou } \operatorname{non}(m|2n)\big)\Big)\Big).$$

*En utilisant*

$$(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}) \Leftrightarrow \big(\operatorname{non}(cP) \text{ ou } \mathcal{Q}\big)$$

*la contraposée est équivalente à*

$$\mathcal{P}_3 : \ \Big(\forall m \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}, \Big((m|n) \text{ ou } \big((2|m) \text{ ou } (2|m) \text{ ou } \operatorname{non}(m|2n)\big)\Big)\Big).$$

*Nous pouvons faire une étude de cas pour démontrer que $\mathcal{P}_3$ est vraie :*
*Soient $m \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$. Notons $\mathcal{Q}(m,n)$ la propriété :*

$$\mathcal{Q}(m,n) : \ \big((m|n) \text{ ou } (2|m) \text{ ou } (2|m) \text{ ou } \operatorname{non}(m|2n)\big)$$

- *Si $(2|m) \text{ ou } (2|m)$ ($m$ est pair ou $n$ pair), alors $\mathcal{Q}(m,n)$ est vraie.*
- *Sinon, on a $\operatorname{non}\big((2|m) \text{ ou } (2|m)\big)$, c'est à dire $\big(\operatorname{non}(2|m) \text{ et } \operatorname{non}(2|m)\big)$, ou encore $m$ et $n$ impairs. On a alors*

$$(\exists p \in \mathbb{N},\ m = 2p+1), (\exists q \in \mathbb{N},\ n = 2q+1).$$

  - ⋆ *Si $\operatorname{non}(m|2n)$ alors $\mathcal{Q}(m,n)$ est vraie.*
  - ⋆ *Sinon, on a $(m|2n)$ et alors*

$$(\exists k \in \mathbb{N},\ 2n = km).$$

    - ∘ *Si $k$ est pair, alors*

$$(\exists r \in \mathbb{N},\ k = 2r)$$

      *et comme $2n = km$, on obtient $2n = 2rm$ et donc $n = rm$ c'est à dire $(m|n)$. la proposition $\mathcal{Q}(m,n)$ est donc vraie.*
    - ∘ *Sinon $k$ est impair*

$$(\exists r \in \mathbb{N},\ k = 2r+1)$$

      *et comme $2n = km$, on obtient*

$$2n = (2r+1)m = (2r+1)(2p+1) = 2(2rp + r + 1) + 1$$

      *or $2(2rp + r + 1) + 1$ est impair, il ne peut être égal à $2n$. On a donc une contradiction ce qui permet d'affirmer que $k$ ne peut être impair.*

*On a démontré que dans tous les cas $\mathcal{Q}(m,n)$ est vraie, ce qui démontre que la proposition $\mathcal{P}_3$ est vraie.*
$\square$

(4) Si $n \in \mathbb{N}$ est tel que $(n^2 - 1)$ n'est pas divisible par 8, alors $n$ est pair.
*Indication :* montrez que si $n$ est impair, il existe $k \in \mathbb{N}$ avec $n = 4k+1$ ou $4k+3$. Utilisez alors une preuve par cas.

*On a sous forme d'implication, en formule :*

$$\Big(\forall n \in \mathbb{N}, \big(\operatorname{non}(8|n^2 - 1) \Rightarrow (2|n)\big)\Big).$$

*La contraposée est :*

$$\Big(\forall n \in \mathbb{N}, \big(\operatorname{non}(2|n) \Rightarrow (8|n^2 - 1)\big)\Big)$$

— *Commençons par démontrer que si $n$ est impair, il existe $k \in \mathbb{N}$ avec $n = 4k+1$ ou $4k+3$. Soit $n \in \mathbb{N}$ impair alors il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2r+1$.*
*Effectuons une étude de cas :*
- *Si $r$ est pair alors il existe $k \in \mathbb{N}$, tel que $r = 2k$ et donc $n = 4k+1$.*

- *Sinon $r$ est impair, et il existe $k \in \mathbb{N}$, tel que $r = 2k+1$ et donc $n = 2(2k+1)+1 = 4k+3$.*

— *En utilisant*

$$(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}) \Leftrightarrow \big(\mathrm{non}(cP)\,\mathrm{ou}\,\mathcal{Q}\big)$$

*la contraposée est équivalente à*

$$\mathcal{P}_4 : \ \Big(\forall n \in \mathbb{N}, \big((2|n)\,\mathrm{ou}\,(8|n^2-1)\big)\Big).$$

*Effectuons une étude de cas pour démontrer cette dernière proposition.*
*Soit $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{Q}(n)$ la propriété :*

$$\mathcal{Q}(n) : \ \big((2|n)\,\mathrm{ou}\,(8|n^2-1)\big).$$

- *Si $(2|n)$ (i.e. $n$ pair) alors $\mathcal{Q}(n)$ est vraie.*
- *Sinon on a $Non(2|n)$ (i.e. $n$ impair) et $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 4k+1$ ou $n = 4k+3$.*
  - ⋆ *Si $n = 4k+1$ alors*

    $$n^2 - 1 = (4k+1)^2 - 1 = 16k^2 + 8k = 8(2k^2+k)$$

    *et donc $(8|n^2-1)$. $\mathcal{Q}(n)$ est alors vraie.*
  - ⋆ *Si $n = 4k+3$ alors*

    $$n^2 - 1 = (4k+3)^2 - 1 = 16k^2 + 8k + 8 = 8(2k^2+k+1)$$

    *et donc $(8|n^2-1)$. $\mathcal{Q}(n)$ est alors vraie.*

  *Dans tous les cas $\mathcal{Q}(n)$ est vraie et donc $\mathcal{P}_4$ est vraie.*

□

(5) Si $a \in \mathbb{R}$ et $a \geq 0$, et si pour tout $\epsilon \in \mathbb{R}$, on a $a < \epsilon$, alors $a = 0$.

*On a sous forme d'implication, en formule :*

$$\Big(\forall a \in \mathbb{R}^+, \big((\forall \epsilon \in \mathbb{R}^{+*},\ a < \epsilon) \Rightarrow a = 0)\big)\Big).$$

*La contraposée est :*

$$\Big(\forall a \in \mathbb{R}^+, \big((a \neq 0) \Rightarrow (\exists \epsilon \in \mathbb{R}^{+*},\ a \geq \epsilon)\big)\Big).$$

*Démontrons la contraposé. Soit $a \in \mathbb{R}^+$.*
*Si $a \neq 0$ alors en prenant (par exemple) $\epsilon = a/2 > 0$ on a bien $a \geq \epsilon$.* □