Ce document [1] contient quelques exercices corrigés sur les classes d'équivalence et il est à travailler après avoir assimilé le document sur les relations. Il peut contenir quelques bugs ... Merci de me les signaler `cuvelier@math.univ-paris13.fr`

Définition 1

Soit E un ensemble muni d'une **relation d'équivalence** $\mathcal{R}$. Soient $(x, y) \in E^2$, si $x \mathcal{R} y$ (par symétrie, on a aussi $y \mathcal{R} x$) alors on dit que x **et** y **sont équivalents (modulo la relation** $\mathcal{R}$**).** On le note

$$x \sim y (\bmod \mathcal{R}) \quad \text{ou} \quad x \sim y.$$

Si $x \not\mathcal{R} y$ alors x **et** y **ne sont pas équivalents** et on le note

$$x \nsim y (\bmod \mathcal{R}) \quad \text{ou} \quad x \nsim y.$$

Définition 2

Soit E un ensemble muni d'une **relation d'équivalence** $\mathcal{R}$ et soit $x \in E$. On appelle **classe d'équivalence de** x **modulo** $\mathcal{R}$ le sous-ensemble de E formé des éléments de E en relation avec x. On le note $\mathcal{C}_x$ ou $[x]$, et on a

$$\mathcal{C}_x := [x] := \{y \in E \; ; \; x \sim y (\bmod \mathcal{R})\}.$$

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguité, on peut noter $x \sim y$ à la place de $x \sim y (\bmod \mathcal{R})$.

Théorème 3

Soit E un ensemble muni d'une **relation d'équivalence** $\mathcal{R}$.

(a) $\forall x \in E$, $x \in \mathcal{C}_x$ et $\mathcal{C}_x \neq \emptyset$.

(b) $\forall (x, y) \in E^2$, $(x \sim y) \iff (\mathcal{C}_x = \mathcal{C}_y)$.

(c) $\forall (x, y) \in E^2$, $(x \nsim y) \iff (\mathcal{C}_x \cap \mathcal{C}_y = \emptyset)$.

Définition 4: (*version simplifiée provisoire*)

Soient $(Q_i)_{i=1}^n$, n sous-ensembles **non vides** d'un ensemble E. On dit qu'**ils forment une partition de** E si

$$E = \bigcup_{i=1}^{n} Q_i$$

et s'ils sont deux à deux disjoints :

$$\forall (i, j) \in [\![n]\!], \; (i \neq j) \Longrightarrow (Q_i \cap Q_j = \emptyset)$$

Proposition 5

Soit E un ensemble muni d'une **relation d'équivalence** $\mathcal{R}$. Les classes d'équivalence de E modulo $\mathcal{R}$ forment une partition de E.

1. Version du 25 novembre 2018 à 10:29

1 Classe d'équivalence

Exercice 1.1

On définit sur $\mathbb{R}$ la relation $\mathcal{R}$ par

$$(x, y) \in \mathbb{R}, \quad x \,\mathcal{R}\, y \Longleftrightarrow (x^2 - y^2 = x - y).$$

Q. 1 *Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.*

Q. 2 1. *Déterminer la classe d'équivalence d'un élément x de $\mathbb{R}$.*

2. *Combien y-a-t'il d'éléments dans cette classe ?*

Correction Exercice On définit sur $\mathbb{R}$ la relation $\mathcal{R}$ par

$$(x, y) \in \mathbb{R}, \quad x \,\mathcal{R}\, y \Longleftrightarrow (x^2 - y^2 = x - y).$$

Q. 1 $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence si elle est réflexive, symétrique et transitive.

- **Réflexive.** Soit $x \in E$, montrons que $x \,\mathcal{R}\, x$.
Comme $x^2 - x^2 = 0$ et $x - x = 0$, on a $x^2 - x^2 = x - x$, ce qui démontre que $x \,\mathcal{R}\, x$.
- **Symétrique.** Soit $(x, y) \in E^2$, montrons que

$$(x \,\mathcal{R}\, y) \Longleftrightarrow (y \,\mathcal{R}\, x).$$

En effet, on a

$$\begin{aligned}(x \,\mathcal{R}\, y) &\Longleftrightarrow (x^2 - y^2 = x - y)\\ &\Longleftrightarrow (y^2 - x^2 = y - x) \text{ en multipliant par } -1\\ &\Longleftrightarrow (y \,\mathcal{R}\, x)\end{aligned}$$

- **Transitive.** Soit $(x, y, z) \in E^3$, montrons que

$$\big(x \,\mathcal{R}\, y \text{ et } y \,\mathcal{R}\, z\big) \Longrightarrow (x \,\mathcal{R}\, z).$$

En effet, si $(x \,\mathcal{R}\, y)$ et $(y \,\mathcal{R}\, z)$ alors

$$\big((x^2 - y^2 = x - y) \text{ et } (y^2 - z^2 = y - z)\big)$$

En regroupant les termes, la propriété précédente est équivalente à

$$\big((x^2 - x = y^2 - y) \text{ et } (y^2 - y = z^2 - z)\big)$$

On en déduit alors la propriété suivante

$$(x^2 - x = z^2 - z).$$

Cette dernière s'écrit aussi sous la forme

$$(x^2 - z^2 = x - z)$$

et on conclu que $(x \,\mathcal{R}\, z)$.

Q. 2 1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On doit déterminer l'ensemble $\mathcal{C}_x$ des éléments $y \in \mathbb{R}$ tels que $x \,\mathcal{R}\, y$. Il faut donc pour celà résoudre l'équation (en y) :

$$\begin{aligned}x^2 - y^2 = x - y &\Longleftrightarrow (x - y)(x + y) - (x - y) = 0\\ &\Longleftrightarrow (x - y)(x + y - 1) = 0\end{aligned}$$

Les solutions sont donc $y = x$ et $y = 1 - x$. On a,

$$\mathcal{C}_x = \begin{cases} \{x, 1 - x\}, & \text{si } x \neq 1/2\\ \{1/2\}, & \text{si } x = 1/2.\end{cases}$$

2. On a

$$\mathrm{card}(\mathcal{C}_x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \neq 1/2 \\ 1 & \text{si } x = 1/2 \end{cases}$$

◇

Exercice 1.2

Sur $\mathbb{R}^2$, on définit la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ par

$$\forall \boldsymbol{X} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ \forall \boldsymbol{Y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2,\ \big((\boldsymbol{X}\ \mathcal{R}\ \boldsymbol{Y}) \iff (x_1 = y_1)\big).$$

Q. 1 *Démontrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence,*

Q. 2 *Déterminer la classe d'équivalence d'un élément $\boldsymbol{A} = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$.*

Correction Exercice

Q. 1 On va démontrer que la relation $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence c'est à dire qu'elle est réflexive, symétrique et transitive.

- $\mathcal{R}$ est réflexive si
$$\forall \boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^2,\quad (\boldsymbol{X}\ \mathcal{R}\ \boldsymbol{X}).$$
En effet, pour tout $\boldsymbol{X} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ on a
$$(\boldsymbol{X}\ \mathcal{R}\ \boldsymbol{X}) \iff (x_1 = x_1)$$
or on a toujours $x_1 = x_1$!
La relation $\mathcal{R}$ est donc réflexive.

- $\mathcal{R}$ est symétrique si
$$\forall (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2,\quad \big((\boldsymbol{X}\ \mathcal{R}\ \boldsymbol{Y}) \iff (\boldsymbol{Y}\ \mathcal{R}\ \boldsymbol{X})\big).$$
Soient $\boldsymbol{X} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ et $\boldsymbol{Y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, alors on a
$$\begin{aligned} (\boldsymbol{X}\ \mathcal{R}\ \boldsymbol{Y}) &\iff (x_1 = y_1) \\ &\iff (y_1 = x_1) \\ &\iff (\boldsymbol{Y}\ \mathcal{R}\ \boldsymbol{X}) \end{aligned}$$
La relation $\mathcal{R}$ est donc symétrique.

- $\mathcal{R}$ est transitive si
$$\forall (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z}) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2,\quad \Big(\big((\boldsymbol{X}\ \mathcal{R}\ \boldsymbol{Y}) \text{ et } (\boldsymbol{Y}\ \mathcal{R}\ \boldsymbol{Z})\big) \implies (\boldsymbol{X}\ \mathcal{R}\ \boldsymbol{Z})\Big)$$
Soient $\boldsymbol{X} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{Y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ et $\boldsymbol{Z} = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$, alors on a
$$\begin{aligned} \big((\boldsymbol{X}\ \mathcal{R}\ \boldsymbol{Y}) \text{ et } (\boldsymbol{Y}\ \mathcal{R}\ \boldsymbol{Z})\big) &\iff \big((x_1 = y_1) \text{ et } (y_1 = z_1)\big) \\ &\implies (x_1 = z_1) \iff (\boldsymbol{X}\ \mathcal{R}\ \boldsymbol{Z}) \end{aligned}$$
La relation $\mathcal{R}$ est donc transitive.

Q. 2 La classe d'équivalence de $\boldsymbol{A} = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$, notée $\mathcal{C}_{\boldsymbol{A}}$, est l'ensemble de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$\mathcal{C}_{\boldsymbol{A}} = \big\{\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^2;\ (\boldsymbol{X}\ \mathcal{R}\ \boldsymbol{A})\big\}.$$

Il faut donc expliciter l'ensemble des éléments $\boldsymbol{X} = (x_1, y_1)$ de $\mathbb{R}^2$ tels que $\boldsymbol{X}\ \mathcal{R}\ \boldsymbol{A}$. Or on a

$$\boldsymbol{X}\ \mathcal{R}\ \boldsymbol{A} \iff x_1 = a_1.$$

On en déduit alors que

$$\mathcal{C}_{\boldsymbol{A}} = \big\{(a_1, y) \in \mathbb{R}^2;\ y \in \mathbb{R}\big\}.$$

◇

Exercice 1.3

On munit l'ensemble $E = \mathbb{R}^2$ de la relation $\mathcal{R}$ définie par

$$\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ \forall (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2,\quad \big((x_1, x_2)\ \mathcal{R}\ (y_1, y_2)\big) \Leftrightarrow \big(\exists a > 0,\ \exists b > 0,\ (y_1 = ax_1) \text{ et } (y_2 = bx_2)\big).$$

Q. 1 *Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.*

Q. 2 *Donner la classe d'équivalence des éléments $A = (1, 0)$, $B = (0, -1)$ et $C = (1, 1)$.*

Q. 3 *Déduire (sans démonstration) toutes les classes d'équivalence de $\mathcal{R}$.*

Correction Exercice

Q. 1 On va démontrer que la relation $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence c'est à dire qu'elle est réflexive, symétrique et transitive.

- $\mathcal{R}$ est réflexive si
$$\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\quad \big((x_1, x_2)\ \mathcal{R}\ (x_1, x_2)\big).$$

  Soit $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, en prenant $a = 1 > 0$ et $b = 1 > 0$ on a
$$x_1 = ax_1 \text{ et } x_2 = ax_2$$
  ce qui est équivalent à
$$\big((x_1, x_2)\ \mathcal{R}\ (x_1, x_2)\big).$$
  La relation $\mathcal{R}$ est donc réflexive.

- $\mathcal{R}$ est symétrique si
$$\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ \forall (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2,\quad \big((x_1, x_2)\ \mathcal{R}\ (y_1, y_2)\big) \iff \big((y_1, y_2)\ \mathcal{R}\ (x_1, x_2)\big).$$

  Soient $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ et $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. On a
$$\big((x_1, x_2)\ \mathcal{R}\ (y_1, y_2)\big) \iff \big(\exists a > 0,\ \exists b > 0,\ (y_1 = ax_1) \text{ et } (y_2 = bx_2)\big)$$
  Comme $a > 0$ et $b > 0$, on pose $c = 1/a > 0$ et $d = 1/b > 0$. On alors
$$\begin{aligned}\big((x_1, x_2)\ \mathcal{R}\ (y_1, y_2)\big) &\iff \big(\exists c > 0,\ \exists d > 0,\ (x_1 = cy_1) \text{ et } (x_2 = dy_2)\big)\\ &\iff \big((y_1, y_2)\ \mathcal{R}\ (x_1, x_2)\big).\end{aligned}$$
  La relation $\mathcal{R}$ est donc symétrique.

- La relation $\mathcal{R}$ est transitive si
$$\begin{aligned}&\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ \forall (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2,\ \forall (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2,\\ &\quad \Big(\big((x_1, x_2)\ \mathcal{R}\ (y_1, y_2)\big) \text{ et } \big((y_1, y_2)\ \mathcal{R}\ (z_1, z_2)\big)\Big) \Longrightarrow \big((x_1, x_2)\ \mathcal{R}\ (z_1, z_2)\big).\end{aligned}$$

  Soient $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ et $(z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$. On a
$$\big((x_1, x_2)\ \mathcal{R}\ (y_1, y_2)\big) \iff \big(\exists a > 0,\ \exists b > 0,\ (y_1 = ax_1) \text{ et } (y_2 = bx_2)\big)$$
  et
$$\big((y_1, y_2)\ \mathcal{R}\ (z_1, z_2)\big) \iff \big(\exists c > 0,\ \exists d > 0,\ (z_1 = cy_1) \text{ et } (z_2 = dy_2)\big).$$
  Si $\big((x_1, x_2)\ \mathcal{R}\ (y_1, y_2)\big)$ et $\big((y_1, y_2)\ \mathcal{R}\ (z_1, z_2)\big)$ alors $z_1 = acx_1$ et $z_2 = bdx_2$ avec $ac > 0$ et $bd > 0$. On en déduit alors que $\big((x_1, x_2)\ \mathcal{R}\ (z_1, z_2)\big)$. La relation $\mathcal{R}$ est donc transitive.

On a démontré que la relation $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

Q. 2 La classe d'équivalence de $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, notée $\mathcal{C}_{(x_1,x_2)}$, est l'ensemble de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$\mathcal{C}_{(x_1,x_2)} = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2;\ (y_1, y_2)\ \mathcal{R}\ (x_1, x_2)\}.$$

- Pour déterminer la classe d'équivalence de $A = (1, 0)$ on va chercher l'ensemble des points $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $(y_1, y_2)\ \mathcal{R}\ (1, 0)$. Or on a

  $$\big((y_1, y_2)\ \mathcal{R}\ (1, 0)\big) \iff \big(\exists a > 0,\ \exists b > 0,\ (y_1 = a \cdot 1) \text{ et } (y_2 = b \cdot 0)\big)$$

  On a alors

  $$\mathcal{C}_A = \mathcal{C}_{(1,0)} =]0, +\infty[\times\{0\}.$$

- Pour déterminer la classe d'équivalence de $B = (0, -1)$ on va chercher l'ensemble des points $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $(y_1, y_2)\ \mathcal{R}\ (0, -1)$. Or on a

  $$\big((y_1, y_2)\ \mathcal{R}\ (0, -1)\big) \iff \big(\exists a > 0,\ \exists b > 0,\ (y_1 = a \cdot 0) \text{ et } (y_2 = b \cdot (-1))\big)$$

  On a alors

  $$\mathcal{C}_B = \mathcal{C}_{(0,-1)} = \{0\}\times] - \infty, 0[.$$

- Pour déterminer la classe d'équivalence de $C = (1, 1)$ on va chercher l'ensemble des points $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $(y_1, y_2)\ \mathcal{R}\ (1, 1)$. Or on a

  $$\big((y_1, y_2)\ \mathcal{R}\ (1, 1)\big) \iff \big(\exists a > 0,\ \exists b > 0,\ (y_1 = a \cdot 1) \text{ et } (y_2 = b \cdot 1)\big)$$

  On a alors

  $$\mathcal{C}_C = \mathcal{C}_{(1,1)} =]0, +\infty[\times]0, +\infty[.$$

Q. 3 La question précédente suggère qu'il y a quatre classes d'équivalence qui sont des demi-droites :

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_{(1,0)} &=]0, +\infty[\times\{0\},\\
\mathcal{C}_{(-1,0)} &=] - \infty, 0[\times\{0\},\\
\mathcal{C}_{(0,1)} &= \{0\}\times]0, +\infty[,\\
\mathcal{C}_{(0,-1)} &= \{0\}\times] - \infty, 0[.
\end{aligned}$$

Il y a aussi quatre classes d'équivalence qui sont des quarts de plan

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_{(1,1)} &=]0, +\infty[\times]0, +\infty[,\\
\mathcal{C}_{(-1,1)} &=] - \infty, 0[\times]0, +\infty[,\\
\mathcal{C}_{(1,-1)} &=]0, +\infty[\times] - \infty, 0[,\\
\mathcal{C}_{(-1,-1)} &=] - \infty, 0[\times] - \infty, 0[.
\end{aligned}$$

Et enfin on peut noter que

$$\mathcal{C}_{(0,0)} = \{(0, 0)\}.$$

Ces neuf ensembles constituent bien une partition de $\mathbb{R}^2$, ce qui prouve que l'on a trouvé toutes les classes d'équivalence.

◇